



Nơi khởi đầu ước mơ

TUYỂN TẬP HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

(ĐÁP ÁN CHI TIẾT)

BIÊN SOẠN: LƯU HUY THƯỞNG

Toàn bộ tài liệu của thầy ở trang:

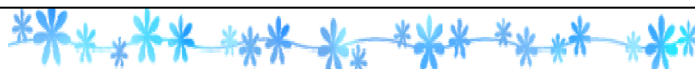
http://www.Luuhuythuong.blogspot.com



HỌ VÀ TÊN: ………………………………………………………………

LỚP :………………………………………………………………….

TRƯỜNG :………………………………………………………………



HÀ NỘI, 4/2014

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

Toàn bộ tài liệu luyện thi đại học môn toán của thầy Lưu Huy Thưởng:

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

PHẦN I ĐƯỜNG THẲNG

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là **vectơ chỉ phương** của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ.

Nhận xét: – Nếu $\vec{u}$ là một VTCP của Δ thì $k\vec{u}$ (k ≠ 0) cũng là một VTCP của Δ.

– Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một VTCP.

2. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là **vectơ pháp tuyến** của đường thẳng Δ nếu giá của nó vuông góc với Δ.

Nhận xét: – Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của Δ thì $k\vec{n}$ (k ≠ 0) cũng là một VTPT của Δ.

– Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một VTPT.

– Nếu $\vec{u}$ là một VTCP và $\vec{n}$ là một VTPT của Δ thì $\vec{u} \perp \vec{n}$.

3. Phương trình tham số của đường thẳng

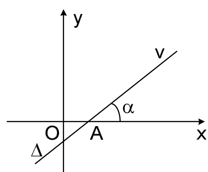
Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (u_1;u_2)$.

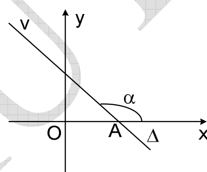
Phương trình tham số của Δ: $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$ (1) (t là tham số).

Nhận xét: – M(x; y) ∈ Δ ⇔ ∃ t ∈ R: $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$.

– Gọi k là hệ số góc của Δ thì:

+ k = tanα, với α = $\widehat{xAv}$, α ≠ 90^0. + k = $\frac{u_2}{u_1}$, với $u_1 \neq 0$.





4. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (u_1;u_2)$.

Phương trình chính tắc của Δ: $\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$ (2) ($u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$).

Chú ý: Trong trường hợp $u_1 = 0$ hoặc $u_2 = 0$ thì đường thẳng không có phương trình chính tắc.

5. Phương trình tham số của đường thẳng

PT $ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ được gọi là **phương trình tổng quát** của đường thẳng.

Nhận xét: – Nếu Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ thì Δ có:

VTPT là $\vec{n} = (a;b)$ và VTCP $\vec{u} = (-b;a)$ hoặc $\vec{u} = (b;-a)$.

– Nếu Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (a;b)$ thì phương trình của Δ là: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

Các trường hợp đặc biệt:

Các hệ số	Phương trình đường thẳng Δ	Tính chất đường thẳng Δ
c = 0	$ax + by = 0$	*Δ đi qua gốc toạ độ O*
a = 0	$by + c = 0$	*Δ // Ox hoặc Δ ≡ Ox*
b = 0	$ax + c = 0$	*Δ // Oy hoặc Δ ≡ Oy*

• Δ đi qua hai điểm A(a; 0), B(0; b) (a, b ≠ 0): Phương trình của Δ: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

(phương trình đường thẳng theo đoạn chắn).

• Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k: Phương trình của Δ: $y - y_0 = k(x - x_0)$

(phương trình đường thẳng theo hệ số góc)

6. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

• Δ_1 cắt Δ_2 ⇔ hệ (1) có một nghiệm ⇔ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (nếu $a_2, b_2, c_2 \neq 0$)

• Δ_1 // Δ_2 ⇔ hệ (1) vô nghiệm ⇔ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (nếu $a_2, b_2, c_2 \neq 0$)

• $\Delta_1 \equiv \Delta_2$ ⇔ hệ (1) có vô số nghiệm ⇔ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (nếu $a_2, b_2, c_2 \neq 0$)

7. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (có VTPT $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$)

và Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (có VTPT $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$).

$$\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{n}_2) & khi\ (\vec{n}_1, \vec{n}_2) \le 90^0 \\ 180^0 - (\vec{n}_1, \vec{n}_2) & khi\ (\vec{n}_1, \vec{n}_2) > 90^0 \end{cases}$$

$$\cos\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \cos\widehat{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)} = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Chú ý: • $\Delta_1 \perp \Delta_2$ ⇔ $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

• Cho Δ_1: $y = k_1x + m_1$, Δ_2: $y = k_2x + m_2$ thì:

+ Δ_1 // Δ_2 ⇔ $k_1 = k_2$ + $\Delta_1 \perp \Delta_2$ ⇔ $k_1 . k_2 = -1$.

8. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

• Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0)$.

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

• Vị trí tương đối của hai điểm đối với một đường thẳng

Cho đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$ và hai điểm $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N) \notin \Delta$.

– M, N nằm cùng phía đối với Δ ⇔ $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$.

– M, N nằm khác phía đối với Δ ⇔ $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

• Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ cắt nhau.

Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

BÀI TẬP CƠ BẢN

HT 1. Cho đường thẳng $d: x - 2y + 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d dưới dạng chính tắc và tham số.

Giải

Ta có: d có 1 vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}(1;-2)$. Suy ra, d có 1 vec-tơ chỉ phương $\vec{u}(2;1)$

Ta có, d qua $M(-1;0)$

Vậy, phương trình tham số của $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \end{cases}$

Phương trình chính tắc của $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1}$

HT 2. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d dưới dạng chính tắc và tổng quát.

Giải

Ta có : d đi qua điểm $M(1;-1)$ và có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}(1;2)$. Suy ra d có 1 vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}(2;-1)$

Phương trình chính tắc của $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2}$

Phương trình tổng quát của $d: 2(x-1) - 1.(y+1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 3 = 0$

HT 3. Cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2}$. Viết phương trình tổng quát và tham số của d.

Giải

Ta có : d đi qua $M(2;-1)$ và nhận vec-tơ $\vec{u}(-1;2)$ làm vec-tơ chỉ phương. Suy ra d có 1 vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}(2;1)$

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

Phương trình tổng quát của $d: 2(x-2) + 1.(y+1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$

HT 4. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d biết :

a. Qua $M(2;1)$ nhận $\vec{u}(1;2)$ làm vec-tơ chỉ phương.

b. Qua $M(2;1)$ nhận $\vec{n}(1;2)$ làm vec-tơ pháp tuyến.

c. Đi qua hai điểm $A(1;2), B(-2;1)$
d. Đi qua $M(1;2)$ với hệ số góc $k=-2$

Giải

a. d có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}(1;2)$ suy ra d có 1 vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}(2;-1)$

Phương trình đường thẳng $d: 2(x-1)-1(y-2)=0 \Leftrightarrow 2x-y=0$

b. Phương trình đường thẳng $d: 1(x-2)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-4=0$

c. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-1)$ Suy ra đường thẳng AB có 1 vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}(1;-3)$

Vậy, phương trình tổng quát của $d: 1(x-1)-3(y-2)=0 \Leftrightarrow x-3y+5=0$

d. Phương trình đường thẳng $d: y=-2(x-1)+2 \Leftrightarrow y=-2x+4$

HT 5. Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp:
a. Đi qua $M(1;2)$ và song song với đường thẳng $\Delta: x+2y-1=0$
b. Đi qua $M(1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: x+2y-1=0$

Giải

a. Ta có: $d//\Delta$ nên phương trình đường thẳng $d: x+2y+C=0$ $(C \neq -1)$

Mặt khác: d qua M nên d có phương trình: $d: x+2y-5=0$ (thỏa mãn)

b. Ta có: $d \perp \Delta$ nên d có phương trình: $d: 2x-y+C=0$

Mặt khác, d qua M nên d có phương trình: $d: 2x-y=0$

BÀI TẬP NÂNG CAO

HT 6. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho 2 đường thẳng $d_1: x-7y+17=0$, $d_2: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng d qua điểm M(0;1) tạo với d_1, d_2 một tam giác cân tại giao điểm của d_1, d_2.

Giải

Phương trình đường phân giác góc tạo bởi d_1, d_2 là:

$$\frac{|x-7y+17|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}}=\frac{|x+y-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+3y-13=0 & (\Delta_1) \\ 3x-y-4=0 & (\Delta_2) \end{array}\right.$$

Đường thẳng cần tìm đi qua M(0;1) và song song với Δ_1 hoặc Δ_2.

KL: $x+3y-3=0$ và $3x-y+1=0$

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 7. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho cho hai đường thẳng $d_1: 2x-y+5=0$. $d_2: 3x+6y-7=0$. Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm P(2; –1) sao cho đường thẳng đó cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 tạo ra một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2.

Giải

(Cách này hơi đặc biệt và có vẻ "rắc rối" hơn so với HT 6 – Bài giải chỉ mang tính chất tham khảo, nên làm theo

cách HT 6)

d_1 VTCP $\vec{a}_1 = (2;-1)$; d_2 VTCP $\vec{a}_2 = (3;6)$

Ta có: $\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2} = 2.3 - 1.6 = 0$ nên $d_1 \perp d_2$ và d_1 cắt d_2 tại một điểm I khác P.

Gọi d là đường thẳng đi qua P(2; –1) có phương trình: $d: A(x-2) + B(y+1) = 0 \Leftrightarrow Ax + By - 2A + B = 0$

d cắt d_1, d_2 tạo ra một tam giác cân có đỉnh I ⇔ khi d tạo với d_1 (hoặc d_2) một góc 45^0

$$\Leftrightarrow \frac{|2A-B|}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \cos 45^0 \Leftrightarrow 3A^2 - 8AB - 3B^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 3B \\ B = -3A \end{array}\right.$$

* Nếu A = 3B ta có đường thẳng $d: 3x + y - 5 = 0$

* Nếu B = –3A ta có đường thẳng $d: x - 3y - 5 = 0$

Vậy có hai đường thẳng thoả mãn yêu cầu bài toán. $d: 3x + y - 5 = 0$; $d: x - 3y - 5 = 0$.

HT 8. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 3x + y + 5 = 0$, $d_2: 3x + y + 1 = 0$ và điểm $I(1;-2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua I và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

Giải

Giả sử $A(a;-3a-5) \in d_1$; $B(b;-3b-1) \in d_2$; $\overrightarrow{IA} = (a-1;-3a-3)$; $\overrightarrow{IB} = (b-1;-3b+1)$

I, A, B thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} b-1 = k(a-1) \\ -3b+1 = k(-3a-3) \end{cases}$

• Nếu $a = 1$ thì $b = 1 \Rightarrow$ AB = 4 (không thoả).

• Nếu $a \neq 1$ thì $-3b + 1 = \frac{b-1}{a-1}(-3a-3) \Leftrightarrow a = 3b - 2$

$AB = \sqrt{(b-a)^2 + \left[3(a-b)+4\right]^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow t^2 + (3t+4)^2 = 8$ (với $t = a - b$).

$\Leftrightarrow 5t^2 + 12t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2;\ t = -\frac{2}{5}$

+ Với $t = -2 \Rightarrow a - b = -2 \Rightarrow b = 0, a = -2 \Rightarrow \Delta: x + y + 1 = 0$

+ Với $t = \frac{-2}{5} \Rightarrow a - b = \frac{-2}{5} \Rightarrow b = \frac{4}{5}, a = \frac{2}{5} \Rightarrow \Delta: 7x - y - 9 = 0$

HT 9. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x + y + 1 = 0$, $d_2: 2x - y - 1 = 0$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua M(1;–1) cắt d_1 và d_2 tương ứng tại A và B sao cho $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Giải

Giả sử: A(a; –a–1), B(b; 2b – 1).

Từ điều kiện $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ tìm được A(1; –2), B(1;1) suy ra $d: x-1=0$

HT 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho điểm M(1; 0). Lập phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt hai đường thẳng $d_1: x+y+1=0,\ d_2: x-2y+2=0$ lần lượt tại A, B sao cho MB = 3MA.

Giải

$$\begin{cases}A\in(d_1)\\B\in(d_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A(a;-1-a)\\B(2b-2;b)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MA}=(a-1;-1-a)\\\overrightarrow{MB}=(2b-3;b)\end{cases}.$$

Từ A, B, M thẳng hàng và $MB=3MA\Rightarrow\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MA}$ (1) hoặc $\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{MA}$ (2)

(1) $\Rightarrow\begin{cases}A\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right)\\B(-4;-1)\end{cases}\Rightarrow(d): x-5y-1=0$ hoặc (2) $\Rightarrow\begin{cases}A\left(0;-1\right)\\B(4;3)\end{cases}\Rightarrow(d): x-y-1=0$

HT 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho điểm M(1; 1). Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M và cắt hai đường thẳng $d_1: 3x-y-5=0,\ d_2: x+y-4=0$ lần lượt tại A, B sao cho $2MA-3MB=0$.

Giải

Giả sử $A(a;3a-5)\in d_1$, $B(b;4-b)\in d_2$.

Vì A, B, M thẳng hàng và $2MA=3MB$ nên $\left[\begin{array}{ll}2\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB} & (1)\\2\overrightarrow{MA}=-3\overrightarrow{MB} & (2)\end{array}\right.$

+ (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}2(a-1)=3(b-1)\\2(3a-6)=3(3-b)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{5}{2}\\b=2\end{cases}\Rightarrow A\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right),B(2;2)$. Suy ra $d: x-y=0$.

+ (2) $\Leftrightarrow\begin{cases}2(a-1)=-3(b-1)\\2(3a-6)=-3(3-b)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\Rightarrow A(1;-2),B(1;3)$. Suy ra $d: x-1=0$.

Vậy có $d: x-y=0$ hoặc $d: x-1=0$.

HT 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ Lập phương trình đường thẳng d qua $M(2;1)$ và tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $S=4$.

Giải

Gọi $A(a;0),B(0;b)\ (a,b\neq 0)$ là giao điểm của d với Ox, Oy, suy ra: $d: \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases}\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1\\|ab|=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b+a=ab\\|ab|=8\end{cases}$.

- Khi $ab=8$ thì $2b+a=8$. Nên: $b=2; a=4\Rightarrow d_1: x+2y-4=0$.

• Khi $ab=-8$ thì $2b+a=-8$. Ta có: $b^2+4b-4=0 \Leftrightarrow b=-2\pm 2\sqrt{2}$.

+ Với $b=-2+2\sqrt{2} \Rightarrow d:(1-\sqrt{2})x+2(1+\sqrt{2})y-4=0$

+ Với $b=-2-2\sqrt{2} \Rightarrow d:(1+\sqrt{2})x+2(1-\sqrt{2})y+4=0$.

Câu hỏi tương tự:

a) $M(8;6), S=12$. ĐS: $d:3x-2y-12=0$; $d:3x-8y+24=0$

HT 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm A(2; –1) và đường thẳng d có phương trình $2x-y+3=0$. Lập phương trình đường thẳng Δ qua A và tạo với d một góc α có cosα $=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Giải

PT đường thẳng (Δ) có dạng: $a(x-2)+b(y+1)=0 \Leftrightarrow ax+by-2a+b=0 \ (a^2+b^2\neq 0)$

Ta có: $\cos\alpha=\dfrac{|2a-b|}{\sqrt{5(a^2+b^2)}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ⇔ $7a^2 - 8ab + b^2 = 0$. Chon a = 1 ⇒ b = 1; b = 7.

$\Rightarrow \Delta_1: x+y-1=0$ và $\Delta_2: x+7y+5=0$

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;1)$ và đường thẳng $d:2x+3y+4=0$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua A và tạo với đường thẳng d một góc 45^0.

Giải

PT đường thẳng (Δ) có dạng: $a(x-2)+b(y-1)=0 \Leftrightarrow ax+by-(2a+b)=0 \ (a^2+b^2\neq 0)$.

Ta có: $\cos 45^0=\dfrac{|2a+3b|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow 5a^2-24ab-5b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5b \\ 5a=-b \end{array}\right.$

+ Với $a=5b$. Chọn $a=5, b=1 \Rightarrow$ Phương trình $\Delta: 5x+y-11=0$.

+ Với $5a=-b$. Chọn $a=1, b=-5 \Rightarrow$ Phương trình $\Delta: x-5y+3=0$.

HT 15. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường thẳng $d:2x-y-2=0$ và điểm $I(1;1)$. Lập phương trình đường thẳng Δ cách điểm I một khoảng bằng $\sqrt{10}$ và tạo với đường thẳng d một góc bằng 45^0.

Giải

Giả sử phương trình đường thẳng Δ có dạng: $ax+by+c=0 \ (a^2+b^2\neq 0)$.

Vì $\widehat{(d,\Delta)}=45^0$ nên $\dfrac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3b \\ b=-3a \end{array}\right.$

• Với $a = 3b \Rightarrow \Delta$: $3x + y + c = 0$. Mặt khác $d(I;\Delta) = \sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{|4+c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 6 \\ c = -14 \end{array}\right.$

• Với $b = -3a \Rightarrow \Delta$: $x - 3y + c = 0$. Mặt khác $d(I;\Delta) = \sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{|-2+c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = -8 \\ c = 12 \end{array}\right.$

Vậy các đường thẳng cần tìm: $3x + y + 6 = 0$; $3x + y - 14 = 0$; $x - 3y - 8 = 0$; $x - 3y + 12 = 0$.

HT 16. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): x - 3y - 4 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4y = 0$. Tìm M thuộc (d) và N thuộc (C) sao cho chúng đối xứng qua điểm A(3; 1).

Giải

M ∈ (d) ⇒ M(3b+4; b) ⇒ N(2 – 3b; 2 – b)

N ∈ (C) ⇒ $(2 - 3b)^2 + (2 - b)^2 - 4(2 - b) = 0 \Rightarrow b = 0;\ b = \frac{6}{5}$

Vậy có hai cặp điểm: M(4;0) và N(2;2) hoặc $M\left(\frac{38}{5};\frac{6}{5}\right),\ N\left(-\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right)$

HT 17. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm A(1; 1) và đường thẳng Δ: $2x + 3y + 4 = 0$. Tìm điểm B thuộc đường thẳng Δ sao cho đường thẳng AB và Δ hợp với nhau góc 45^0.

Giải

Δ có PTTS: $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$ và VTCP $\vec{u} = (-3;2)$. Giả sử $B(1 - 3t; -2 + 2t) \in \Delta$.

$(AB,\Delta) = 45^0 \Rightarrow \left|\cos(\overrightarrow{AB};\vec{u})\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{AB}.\vec{u}|}{AB.|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 169t^2 - 156t - 45 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{15}{13} \\ t = -\frac{3}{13} \end{array}\right.$. Vậy các điểm cần tìm là: $B_1\left(-\frac{32}{13};\frac{4}{13}\right),\ B_2\left(\frac{22}{13};-\frac{32}{13}\right)$.

HT 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x - 3y - 6 = 0$ và điểm $N(3;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho tam giác OMN (O là gốc tọa độ) có diện tích bằng $\frac{15}{2}$.

Giải

Ta có $\overrightarrow{ON} = (3;4)$, ON = 5, PT đường thẳng ON: $4x - 3y = 0$. Giả sử $M(3m + 6; m) \in d$.

Khi đó ta có $S_{\Delta ONM} = \frac{1}{2}d(M,ON).ON \Leftrightarrow d(M,ON) = \frac{2S_{\Delta ONM}}{ON} = 3$

$\Leftrightarrow \frac{|4.(3m+6) - 3m|}{5} = 3 \Leftrightarrow |9m + 24| = 15 \Leftrightarrow m = -1;\ m = \frac{-13}{3}$

+ Với $m = -1 \Rightarrow M(3;-1)$ + Với $m = \dfrac{-13}{3} \Rightarrow M\left(-7;\dfrac{-13}{3}\right)$

HT 19. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(0;2)$ và đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$. Tìm trên đường thẳng d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông ở B và AB = 2BC .

Giải

Giả sử $B(2b-2;b), C(2c-2;c) \in d$.

Vì ΔABC vuông ở B nên AB ⊥ d ⇔ $\overrightarrow{AB}.\vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow B\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{6}{5}\right) \Rightarrow AB = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow BC = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$BC = \dfrac{1}{5}\sqrt{125c^2 - 300c + 180} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 1 \Rightarrow C(0;1) \\ c = \dfrac{7}{5} \Rightarrow C\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{7}{5}\right) \end{array}\right.$

HT 20. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x + y - 3 = 0$, $d_2: x + y - 9 = 0$ và điểm $A(1;4)$. Tìm điểm $B \in d_1, C \in d_2$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Giải

Gọi $B(b;3-b) \in d_1$, $C(c;9-c) \in d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (b-1;-1-b)$, $\overrightarrow{AC} = (c-1;5-c)$.

ΔABC vuông cân tại A ⇔ $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)(c-1) - (b+1)(5-c) = 0 \\ (b-1)^2 + (b+1)^2 = (c-1)^2 + (5-c)^2 \end{cases}$ (*)

Vì $c = 1$ không là nghiệm của (*) nên

(*) ⇔ $\begin{cases} b - 1 = \dfrac{(b+1)(5-c)}{c-1} & (1) \\ (b+1)^2\dfrac{(5-c)^2}{(c-1)^2} + (b+1)^2 = (c-1)^2 + (5-c)^2 & (2) \end{cases}$

Từ (2) ⇔ $(b+1)^2 = (c-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = c-2 \\ b = -c \end{array}\right.$.

+ Với $b = c - 2$, thay vào (1) ta được $c = 4, b = 2 \Rightarrow B(2;1), C(4;5)$.

+ Với $b = -c$, thay vào (1) ta được $c = 2, b = -2 \Rightarrow B(-2;5), C(2;7)$.

Vậy: $B(2;1), C(4;5)$ hoặc $B(-2;5), C(2;7)$.

CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ

HT 21. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm M(3; 1). Viết phương trình đường thẳng d đi qua M cắt các tia Ox, Oy tại A và B sao cho $(OA + 3OB)$ nhỏ nhất.

Giải

PT đường thẳng d cắt tia Ox tại A(a;0), tia Oy tại B(0;b): $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (a,b>0)

M(3; 1) ∈ d $1=\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\overset{Cô-si}{\geq}2\sqrt{\frac{3}{a}.\frac{1}{b}}\Rightarrow ab\geq 12$.

Mà $OA+3OB=a+3b\geq 2\sqrt{3ab}=12\Rightarrow (OA+3OB)_{\min}=12\Leftrightarrow\begin{cases}a=3b\\ \frac{3}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\ b=2\end{cases}$

Phương trình đường thẳng d là: $\frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1\Leftrightarrow x+3y-6=0$

HT 22. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M(1; 2) và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B khác O sao cho $\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Giải

Đường thẳng (d) đi qua $M(1;2)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B khác O, nên $A(a;0);B(0;b)$ với $a.b\neq 0$

⇒ Phương trình của (d) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Vì (d) qua M nên $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có :

$$1=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)^2=\left(\frac{1}{3}.\frac{3}{a}+1.\frac{2}{b}\right)^2\leq\left(\frac{1}{9}+1\right)\left(\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}\right)\Leftrightarrow\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}\geq\frac{9}{10}\Leftrightarrow\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}\geq\frac{9}{10}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{1}{3}:\frac{3}{a}=1:\frac{2}{b}$ và $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1\Leftrightarrow a=10,\ b=\frac{20}{9}\Rightarrow d:2x+9y-20=0$.

HT 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm M (0; 2) và hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình lần lượt là $3x+y+2=0$ và $x-3y+4=0$. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2. Viết phương trình đường thẳng đi qua M, cắt 2 đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại B, C (B và C khác A) sao cho $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

$A=d_1\cap d_2\Rightarrow A(-1;1)$. Ta có $d_1\perp d_2$. Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ. ta có: $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{AH^2}\geq\frac{1}{AM^2}$ (không đổi)

$\Rightarrow\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{AM^2}$ khi H ≡ M, hay Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc với AM. ⇒ Phương trình Δ: $x+y-2=0$.

HT 24. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm A(0; 1) B(2; –1) và các đường thẳng có phương trình:

$d_1: (m-1)x + (m-2)y + 2 - m = 0$; $d_2: (2-m)x + (m-1)y + 3m - 5 = 0$. Chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau. Gọi P = $d_1 \cap d_2$. Tìm m sao cho $PA + PB$ lớn nhất.

Giải

Xét Hệ PT: $\begin{cases}(m-1)x + (m-2)y = m-2 \\ (2-m)x + (m-1)y = -3m+5\end{cases}$.

Ta có $D = \begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ 2-m & m-1 \end{vmatrix} = 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0, \ \forall m$

$\Rightarrow d_1, d_2$ luôn cắt nhau. Ta có: $A(0;1) \in d_1$, $B(2;-1) \in d_2$, $d_1 \perp d_2 \Rightarrow \Delta$ APB vuông tại P

$\Rightarrow$ P nằm trên đường tròn đường kính AB. Ta có: $(PA + PB)^2 \le 2(PA^2 + PB^2) = 2AB^2 = 16$

$\Rightarrow PA + PB \le 4$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ PA = PB $\Leftrightarrow$ P là trung điểm của cung $\overset{\frown}{AB}$

$\Leftrightarrow$ P(2; 1) hoặc P(0; –1) $\Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 2$. Vậy $PA + PB$ lớn nhất $\Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 2$.

HT 25. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng (Δ): $x - 2y - 2 = 0$ và hai điểm $A(-1;2)$, $B(3;4)$. Tìm điểm M $\in$ (Δ) sao cho $2MA^2 + MB^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Giải

Giả sử M $M(2t+2;t) \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2t+3; t-2)$, $\overrightarrow{BM} = (2t-1; t-4)$

Ta có: $2AM^2 + BM^2 = 15t^2 + 4t + 43 = f(t) \Rightarrow \min f(t) = f\left(-\frac{2}{15}\right) \Rightarrow M\left(\frac{26}{15}; -\frac{2}{15}\right)$

HT 26. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x - y + 3 = 0$ và 2 điểm $A(1;0), B(2;1)$. Tìm điểm M trên d sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

Giải

Ta có: $(2x_A - y_A + 3).(2x_B - y_B + 3) = 30 > 0 \Rightarrow$ A, B nằm cùng phía đối với d.

Gọi A′ là điểm đối xứng của A qua d $\Rightarrow A'(-3;2) \Rightarrow$ Phương trình $A'B: x + 5y - 7 = 0$.

Với mọi điểm M ∈ d, ta có: $MA + MB = MA' + MB \ge A'B$.

Mà $MA' + MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ A′, M, B thẳng hàng $\Leftrightarrow$ M là giao điểm của A′B với d.

Khi đó: $M\left(-\frac{8}{11}; \frac{17}{11}\right)$.

PHẦN II ĐƯỜNG TRÒN

Toàn bộ tài liệu luyện thi đại học môn toán của thầy Lưu Huy Thưởng:

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Phương trình đường tròn

Phương trình đường tròn có tâm I(a; b) và bán kính R: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Nhận xét: Phương trình $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$, với $a^2+b^2-c>0$,

là phương trình đường tròn tâm I(–a; –b), bán kính R = $\sqrt{a^2+b^2-c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ.

Δ tiếp xúc với (C) ⇔ $d(I,\Delta)=R$

II. BÀI TẬP

HT 27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn tâm $I(2;1)$, bán kính $R=2$

Giải

Phương trình đường tròn: $(x-2)^2+(y-1)^2=4$

HT 28. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình đường tròn tâm $I(1;2)$ và đi qua $A(-1;1)$

Giải

Bán kính đường tròn: $R=IA=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

Phương trình đường tròn cần viết: $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

HT 29. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình đường tròn tâm $I(-1;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d:3x-4y-1=0$

Giải

Bán kính đường tròn: $R=d(I,d)=\dfrac{|-3-12-1|}{5}=\dfrac{16}{5}$

Phương trình đường tròn cần viết: $(x+1)^2+(y-3)^2=\dfrac{256}{25}$

HT 30. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình đường tròn đi qua $A(1;1),B(-1;3)$ và có bán kính bằng $R=\sqrt{10}$.

Giải

+) Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn.

Ta có, đường tròn qua A,B nên suy ra : $IA=IB\Leftrightarrow\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}=\sqrt{(-1-a)^2+(3-b)^2}$

$\Leftrightarrow 1-2a+a^2+1-2b+b^2=1+2a+a^2+9-6b+b^2\Leftrightarrow 4a-4b=-8\Leftrightarrow b=a+2$ (1)

+ Bán kính đường tròn : $R = \sqrt{10} = IA \Leftrightarrow \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2} = \sqrt{10}$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được :

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{(1-a)^2 + (-1-a)^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow 1 - 2a + a^2 + 1 + 2a + a^2 = 10$

$\Leftrightarrow 2a^2 = 8 \Leftrightarrow a = \pm 2$

+) Với : $a = 2 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow I(2;4)$

Vậy, phương trình đường tròn : $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$

Với, $a = -2 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow I(-2;0)$

Vậy, phương trình đường tròn : $(x+2)^2 + y^2 = 10$

Kết luận : $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$ và $(x+2)^2 + y^2 = 10$

Với câu hỏi tương tự : $A(3;1), B(4;0); R = \sqrt{13}$

Đáp số : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$ *và* $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 13$

HT 31. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm $A(3;0), B(2;1), C(-1;0)$

Giải

Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn :

Ta có : đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C nên suy ra :

$$IA = IB = IC \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-a)^2 + b^2 = (2-a)^2 + (1-b)^2 \\ (3-a)^2 + b^2 = (-1-a)^2 + b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6a + 9 = -4a + 4 - 2b + 1 \\ -6a + 9 = 2a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow I(1;-1)$$

Bán kính đường tròn : $R = IA = \sqrt{5}$

Vậy, phương trình đường tròn : $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 32. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, gọi A, B là các giao điểm của đường thẳng (d): $2x - y - 5 = 0$ và đường tròn (C'): $x^2 + y^2 - 20x + 50 = 0$. Hãy viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm A, B, C(1; 1).

Giải

Tọa độ giao điểm của d và (C') là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 20x + 50 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ x^2 + (2x-5)^2 - 20x + 50 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ 5x^2 - 40x + 75 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy, A(3; 1), B(5; 5)

Đường tròn (C) đi qua 3 điểm: $A(3;1); B(5;5); C(1;1)$

Học sinh làm tương tự HT trên ta có: (C): $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$

HT 33. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(0;4); B(1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng: $d: x - 2y = 0$

Giải

Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn

Ta có, đường tròn đi qua 2 điểm A, B nên suy ra : $IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(0-a)^2 + (4-b)^2} = \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2}$

$\Leftrightarrow -8b + 16 = -2a + 1 - 2b + 1 \Leftrightarrow 2a - 6b = -14 \Leftrightarrow a = 3b - 7$ (1)

Đường tròn tiếp xúc với d nên : $IA = d(I,d) \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (4-b)^2} = \dfrac{|a - 2b|}{\sqrt{5}}$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được : $\sqrt{(3b-7)^2 + (b-4)^2} = \dfrac{|b-7|}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow 10b^2 - 50b + 65 = \dfrac{b^2 - 14b + 49}{5} \Leftrightarrow 49b^2 - 236b + 276 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{138}{49} \\ b = 2 \end{array}\right.$

Với, $b = \dfrac{138}{49} \Rightarrow a = \dfrac{71}{49} \Rightarrow I\left(\dfrac{71}{49}; \dfrac{138}{49}\right)$; Bán kính đường tròn : $R = \sqrt{\dfrac{8405}{2401}}$

Phương trình đường tròn : $\left(x - \dfrac{71}{49}\right)^2 + \left(y - \dfrac{138}{49}\right)^2 = \dfrac{8405}{2401}$

Với, $b = 2 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow I(-1;2)$; Bán kính : $R = \sqrt{5}$

Phương trình đường tròn : $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$

Kết luận : $\left(x - \dfrac{71}{49}\right)^2 + \left(y - \dfrac{138}{49}\right)^2 = \dfrac{8405}{2401}$ và $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$

HT 34. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình đường tròn (C) đi qua $A(-1;-2)$ và tiếp xúc với $d: 7x - y - 5 = 0$ tại điểm $M(1;2)$

Giải

Cách 1 : *Vì đường tròn tiếp xúc với đường thẳng tại M nên M thuộc đường tròn.*

Như vậy, bài toán trở thành viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A và M, tiếp xúc với d.

Học sinh viết tương tự HT trên. Đáp số : $(x+6)^2+(y-3)^2=50$

Cách 2 :

Gọi I là tâm đường tròn.

Ta có, đường tròn tiếp xúc với d tại M nên $IM \perp d$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $IM: x+7y+c=0$, IM qua M nên $c=-15$

Vậy, $IM: x+7y-15=0 \Rightarrow I(15-7a;a)$

Ta có : Đường tròn đi qua A $\Rightarrow IA=IM \Leftrightarrow (-16+7a)^2+(-2-a)^2=(-14+7a)^2+(2-a)^2$

$\Leftrightarrow 50a^2-220a+260=50a^2-200a+200 \Leftrightarrow a=3$

Vậy, $I(-6;3)$, bán kính : $R=\sqrt{50}$

Phương trình đường tròn : $(x+6)^2+(y-3)^2=50$

HT 35. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình đường tròn tiếp xúc với đường thẳng $d: x-y-2=0$ tại điểm $M(3;1)$ và có tâm I thuộc đường thẳng $d_1: 2x-y-2=0$

Giải

Ta có: (C) tiếp xúc với d tại M, suy ra tâm I của (C) thuộc đường thẳng Δ có phương trình cho bởi:

$$\Delta\begin{cases} qua\ M(3;1) \\ vtpt\ \vec{n}(1;1) \end{cases} \Leftrightarrow \Delta: x+y-4=0$$

Khi đó: $I=d_1\cap\Delta$, tọa độ I là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow I(2;2)$

(C) tiếp xúc với d khi: $R=MI=\sqrt{2}$

Vậy, phương trình đường tròn cần viết: $(x-2)^2+(y-2)^2=2$

HT 36. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho ba đường thẳng: $d_1: 2x+y-3=0$, .., $d_3: 4x+3y+2=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d_1 và tiếp xúc với d_2 và d_3.

Giải

Gọi tâm đường tròn là $I(t;3-2t)\in d_1$.

Khi đó: $d(I,d_2)=d(I,d_3) \Leftrightarrow \dfrac{|3t+4(3-2t)+5|}{5}=\dfrac{|4t+3(3-2t)+2|}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=4 \end{array}\right.$

Vậy có 2 đường tròn thoả mãn: $(x-2)^2+(y+1)^2=\dfrac{49}{25}$ và $(x-4)^2+(y+5)^2=\dfrac{9}{25}$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) Với $d_1: x-6y-10=0$, .., $d_3: 4x-3y-5=0$.

ĐS: $(x-10)^2+y^2=49$ hoặc $\left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$.

HT 37. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta: x+3y+8=0$, $\Delta': 3x-4y+10=0$ và điểm A(–2; 1). Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng Δ, đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ′.

Giải

Giả sử tâm $I(-3t-8;t)\in\Delta$.. Ta có: $d(I,\Delta')=IA$

$$\Leftrightarrow \frac{|3(-3t-8)-4t+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{(-3t-8+2)^2+(t-1)^2}\Leftrightarrow t=-3\Rightarrow I(1;-3),\ R=5$$

PT đường tròn cần tìm: $(x-1)^2+(y+3)^2=25$.

HT 38. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta: 4x-3y+3=0$ và $\Delta': 3x-4y-31=0$. Lập phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm có tung độ bằng 9 và tiếp xúc với Δ'. Tìm tọa độ tiếp điểm của (C) và Δ'.

Giải

Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C). (C) tiếp xúc với Δ tại điểm $M(6;9)$ và (C) tiếp xúc với Δ' nên

$$\begin{cases} d(I,\Delta)=d(I,\Delta') \\ \overrightarrow{IM}\perp\vec{u}_\Delta=(3;4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{|4a-3b+3|}{5}=\frac{|3a-4b-31|}{5}\\ 3(a-6)+4(b-9)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|4a-3\frac{54-3a}{4}+3\right|=|6a-85|\\ 3a+4b=54\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|25a-150|=4|6a-85|\\ b=\frac{54-3a}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=10;\ b=6\\ a=-190;\ b=156\end{array}\right.$$

Vậy: $(C):(x-10)^2+(y-6)^2=25$ tiếp xúc với Δ' tại $N(13;2)$

hoặc $(C):(x+190)^2+(y-156)^2=60025$ tiếp xúc với Δ' tại $N(-43;-40)$

HT 39. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình đường tròn đi qua $A(2;-1)$ và tiếp xúc với các trục toạ độ.

Giải

Đường tròn tiếp xúc với các trục tọa độ nên tâm I có dạng: $I_1(a;a)$ hoặc $I_2(a;-a)$

Phương trình đường tròn có dạng: $\left[\begin{array}{ll}(x-a)^2+(y+a)^2=a^2 & (a)\\ (x-a)^2+(y-a)^2=a^2 & (b)\end{array}\right.$

Thay tọa độ điểm A vào phương trình ta được:

a) $\Rightarrow a=1;\ a=5$ b) $\Rightarrow$ vô nghiệm.

Kết luận: $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ và $(x-5)^2+(y+5)^2=25$.

HT 40. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): 2x - y - 4 = 0$. Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm ở trên đường thẳng (d).

Giải

Gọi $I(m; 2m-4) \in (d)$ là tâm đường tròn cần tìm. Ta có: $|m| = |2m-4| \Leftrightarrow m = 4, m = \frac{4}{3}$.

• $m = \frac{4}{3}$ thì phương trình đường tròn là: $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

• $m = 4$ thì phương trình đường tròn là: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$.

HT 41. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm A(–1;1) và B(3;3), đường thẳng (Δ): $3x - 4y + 8 = 0$. Lập phương trình đường tròn qua A, B và tiếp xúc với đường thẳng (Δ).

Giải

Tâm I của đường tròn nằm trên đường trung trực d của đoạn AB

d qua M(1; 2) có VTPT là $\overrightarrow{AB} = (4;2) \Rightarrow$ d: 2x + y – 4 = 0 ⇒ Tâm I(a;4 – 2a)

Ta có IA = d(I,D) $\Leftrightarrow |11a - 8| = 5\sqrt{5a^2 - 10a + 10} \Leftrightarrow 2a^2 - 37a + 93 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = \frac{31}{2} \end{array}\right.$

• Với a = 3 ⇒ I(3;–2), R = 5 ⇒ (C): $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$

• Với a = $\frac{31}{2} \Rightarrow I\left(\frac{31}{2}; -27\right)$, R = $\frac{65}{2} \Rightarrow$ (C): $\left(x - \frac{31}{2}\right)^2 + (y+27)^2 = \frac{4225}{4}$

HT 42. Trong hệ toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng $d: x + 2y - 3 = 0$ và $\Delta: x + 3y - 5 = 0$. Lập phương trình đường tròn có bán kính bằng $\frac{2\sqrt{10}}{5}$, có tâm thuộc d và tiếp xúc với Δ.

Giải

Tâm I ∈ $d \Rightarrow I(-2a + 3; a)$. (C) tiếp xúc với Δ nên:

$$d(I,\Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|a-2|}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 6 \\ a = -2 \end{array}\right.$$

⇒ (C): $(x+9)^2 + (y-6)^2 = \frac{8}{5}$ hoặc (C): $(x-7)^2 + (y+2)^2 = \frac{8}{5}$.

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 43. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0$. Tia Oy cắt (C) tại A. Lập phương trình đường tròn (C′), bán kính R′ = 2 và tiếp xúc ngoài với (C) tại A.

Giải

(C) có tâm .., bán kính R= 4; A(0; 2). Gọi I′ là tâm của (C′).

PT đường thẳng IA : $\begin{cases} x = 2\sqrt{3}t \\ y = 2t + 2 \end{cases}$, $I' \in IA \Rightarrow I'(2\sqrt{3}t; 2t + 2)$.

$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{I'A} \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow I'(\sqrt{3}; 3) \Rightarrow$ (C′): $(x - \sqrt{3})^2 + (y - 3)^2 = 4$

HT 44. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$. Hãy viết phương trình đường tròn (C′) đối xứng với đường tròn (C) qua điểm M $\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{2}{5}\right)$

Giải

(C) có tâm I(0;2), bán kính R = 3. Gọi I’ là điểm đối xứng của I qua M

$\Rightarrow$ I′$\left(\dfrac{8}{5}; \dfrac{-6}{5}\right) \Rightarrow$ (C′): $\left(x - \dfrac{8}{5}\right)^2 + \left(y + \dfrac{6}{5}\right)^2 = 9$

HT 45. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C′) tâm M(5; 1) biết (C′) cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$.

Giải

(C) có tâm I(1; –2), bán kính $R = \sqrt{3}$. PT đường thẳng IM: $3x - 4y - 11 = 0$. $AB = \sqrt{3}$.

Gọi $H(x; y)$ là trung điểm của AB. Ta có: $\begin{cases} H \in IM \\ IH = \sqrt{R^2 - AH^2} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 11 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{5}; y = -\dfrac{29}{10} \\ x = \dfrac{11}{5}; y = -\dfrac{11}{10} \end{array}\right. \Rightarrow H\left(-\dfrac{1}{5}; -\dfrac{29}{10}\right)$ hoặc $H\left(\dfrac{11}{5}; -\dfrac{11}{10}\right)$.

• Với $H\left(-\dfrac{1}{5}; -\dfrac{29}{10}\right)$. Ta có $R'^2 = MH^2 + AH^2 = 43 \Rightarrow$ PT (C′): $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 43$.

• Với $H\left(\dfrac{11}{5}; -\dfrac{11}{10}\right)$. Ta có $R'^2 = MH^2 + AH^2 = 13 \Rightarrow$ PT (C′): $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 13$.

HT 46. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ và điểm $K(3; 4)$. Lập phương trình đường tròn (T) có tâm K, cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất, với I là tâm của đường tròn (C).

Giải

(C) có tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 2$. $S_{\Delta IAB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ ΔIAB vuông tại I $\Leftrightarrow$ $AB = 2\sqrt{2}$.

Mà $IK = 2\sqrt{2}$ nên có hai đường tròn thoả YCBT.

+ (T_1) có bán kính $R_1 = R = 2 \Rightarrow (T_1):(x-3)^2+(y-4)^2=4$

+ (T_2) có bán kính $R_2 = \sqrt{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow (T_1):(x-3)^2+(y-4)^2=20$.

HT 47. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các đỉnh: A(–2;3), $B\left(\frac{1}{4};0\right)$, $C(2;0)$.

Giải

Điểm D(d;0) $\left(\frac{1}{4}<d<2\right)$ thuộc đoạn BC là chân đường phân giác trong của góc A

khi và chỉ khi $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{d-\frac{1}{4}}{2-d} = \frac{\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2+\left(-3\right)^2}}{\sqrt{4^2+\left(-3\right)^2}} \Rightarrow 4d-1=6-3d \Rightarrow d=1.$

Phương trình AD: $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-3} \Leftrightarrow x+y-1=0$; AC: $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{-3} \Leftrightarrow 3x+4y-6=0$

Giả sử tâm I của đường tròn nội tiếp có tung độ là b. Khi đó hoành độ là $1-b$ và bán kính cũng bằng b. Vì khoảng cách từ I tới AC cũng phải bằng b nên ta có:

$$\frac{\left|3\left(1-b\right)+4b-6\right|}{\sqrt{3^2+4^2}} = b \Leftrightarrow \left|b-3\right| = 5b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b-3=5b \Rightarrow b=-\frac{4}{3} \\ b-3=-5b \Rightarrow b=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Rõ ràng chỉ có giá trị $b=\frac{1}{2}$ là hợp lý.

Vậy, phương trình của đường tròn nội tiếp ΔABC là: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

HT 48. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng (d_1): $4x-3y-12=0$ và (d_2): $4x+3y-12=0$. Tìm toạ độ tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có 3 cạnh nằm trên (d_1), (d_2) và trục Oy.

Giải

Gọi $A=d_1\cap d_2, B=d_1\cap Oy, C=d_2\cap Oy \Rightarrow A(3;0), B(0;-4), C(0;4) \Rightarrow$ ΔABC cân đỉnh A và AO là phân giác trong của góc A. Gọi I, R là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC

$\Rightarrow I\left(\frac{4}{3};0\right), R=\frac{4}{3}$.

HT 49. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường thẳng d: $x-y-1=0$ và hai đường tròn có phương trình: (C_1):

$(x-3)^2+(y+4)^2=8$, (C_2): $(x+5)^2+(y-4)^2=32$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc d và tiếp xúc ngoài với (C_1) và (C_2).

Giải

Gọi I, I_1, I_2, R, R_1, R_2 lần lượt là tâm và bán kính của (C), (C_1), (C_2). Giả sử $I(a;a-1)\in d$.

(C) tiếp xúc ngoài với (C_1), (C_2) nên $II_1=R+R_1,\ II_2=R+R_2\Rightarrow II_1-R_1=II_2-R_2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-3)^2+(a+3)^2}-2\sqrt{2}=\sqrt{(a-5)^2+(a+5)^2}-4\sqrt{2}\Leftrightarrow$ a = 0 ⇒ I(0; –1), R = $\sqrt{2}$

⇒ Phương trình (C): $x^2+(y+1)^2=2$.

HT 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết góc giữa tiếp tuyến này và trục tung bằng 30°.

Giải

$(C): (x+1)^2+y^2=1\Rightarrow I(-1;0); R=1$. Hệ số góc của tiếp tuyến (Δ) cần tìm là $\pm\sqrt{3}$.

⇒ PT (Δ) có dạng $\Delta_1:\sqrt{3}x-y+b=0$ hoặc $\Delta_2:\sqrt{3}x+y+b=0$

+ $\Delta_1:\sqrt{3}x-y+b=0$ tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow d(I,\Delta_1)=R\Leftrightarrow \frac{|b-\sqrt{3}|}{2}=1\Leftrightarrow b=\pm2+\sqrt{3}$.

Kết luận: $(\Delta_1):\sqrt{3}x-y\pm2+\sqrt{3}=0$

+ $(\Delta_2):\sqrt{3}x+y+b=0$ tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow d(I,\Delta_2)=R\Leftrightarrow \frac{|b-\sqrt{3}|}{2}=1\Leftrightarrow b=\pm2+\sqrt{3}$.

Kết luận: $(\Delta_2):\sqrt{3}x+y\pm2+\sqrt{3}=0$.

HT 51. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-6x-2y+5=0$ và đường thẳng (d): $3x+y-3=0$. Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C), biết tiếp tuyến không đi qua gốc toạ độ và hợp với đường thẳng (d) một góc 45^0.

Giải

(C) có tâm I(3; 1), bán kính R = $\sqrt{5}$. Giả sử (Δ): $ax+by+c=0\ (c\neq0)$.

Từ: $\begin{cases}d(I,\Delta)=\sqrt{5}\\ \cos(d,\Delta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=2,b=-1,c=-10\\a=1,b=2,c=-10\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta:2x-y-10=0\\\Delta:x+2y-10=0\end{array}\right.$.

HT 52. Trong hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=10$ và đường thẳng $d:2x-y-2=0$. Lập phương trình các tiếp tuyến của đường tròn (C), biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng d một góc 45^0.

Giải

(C) có tâm $I(1;1)$ bán kính $R = \sqrt{10}$. Gọi $\vec{n} = (a;b)$ là VTPT của tiếp tuyến Δ $(a^2 + b^2 \neq 0)$,

Vì $\widehat{(\Delta, d)} = 45^0$ nên $\dfrac{|2a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3b \\ b = -3a \end{array}\right.$

• Với $a = 3b \Rightarrow$ Δ: $3x + y + c = 0$. Mặt khác $d(I;\Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|4 + c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 6 \\ c = -14 \end{array}\right.$

• Với $b = -3a \Rightarrow$ Δ: $x - 3y + c = 0$. Mặt khác $d(I;\Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|-2 + c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = -8 \\ c = 12 \end{array}\right.$

Vậy có bốn tiếp tuyến cần tìm: $3x + y + 6 = 0;\ 3x + y - 14 = 0;\ x - 3y - 8 = 0;\ x - 3y + 12 = 0$.

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 53. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, ($C_2$): $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$.

Giải

(C_1) có tâm $I_1(1;\ 1)$, bán kính $R_1 = 2$; (C_2) có tâm $I_2(4;\ 1)$, bán kính $R_2 = 1$.

Ta có: $I_1I_2 = 3 = R_1 + R_2 \Rightarrow$ (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài nhau tại A(3; 1)

$\Rightarrow$ (C_1) và (C_2) có 3 tiếp tuyến, trong đó có 1 tiếp tuyến chung trong tại A là x = 3 // Oy.

* Xét 2 tiếp tuyến chung ngoài: $(\Delta): y = ax + b \Leftrightarrow (\Delta): ax - y + b = 0$ ta có:

$$\begin{cases} d(I_1;\ \Delta) = R_1 \\ d(I_2;\Delta) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|a + b - 1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \\ \dfrac{|4a + b - 1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ b = \dfrac{4 - 7\sqrt{2}}{4} \end{cases} \ hay \ \begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ b = \dfrac{4 + 7\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Vậy, có 3 tiếp tuyến chung: $(\Delta_1): x = 3,\ (\Delta_2): y = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}x + \dfrac{4 + 7\sqrt{2}}{4},\ (\Delta_3)\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x + \dfrac{4 - 7\sqrt{2}}{4}$

HT 54. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn (C): $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$ và (C′): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C) và (C′).

Giải

(C) có tâm I(2; 3) và bán kính $R = \sqrt{2}$; (C′) có tâm I′(1; 2) và bán kính $R' = 2\sqrt{2}$.

Ta có: $II' = \sqrt{2} = |R - R'| \Rightarrow$ (C) và (C′) tiếp xúc trong $\Rightarrow$ Tọa độ tiếp điểm M(3; 4).

Vì (C) và (C′) tiếp xúc trong nên chúng có duy nhất một tiếp tuyến chung là đường thẳng qua điểm M(3; 4), có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{II'} = (-1; -1) \Rightarrow$ PTTT: $x + y - 7 = 0$

HT 55. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2y-3=0$ và $(C_2): x^2+y^2-8x-8y+28=0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Giải

(C_1) có tâm $I_1(0;1)$, bán kính $R_1=2$; (C_2) có tâm $I_2(4;4)$, bán kính $R_2=2$.

Ta có: $I_1I_2=5>4=R_1+R_2 \Rightarrow (C_1),(C_2)$ ngoài nhau. Xét hai trường hợp:

+ Nếu d // Oy thì phương trình của d có dạng: $x+c=0$.

Khi đó: $d(I_1,d)=d(I_2,d) \Leftrightarrow |c|=|4+c| \Leftrightarrow c=-2 \Rightarrow d: x-2=0$.

+ Nếu d không song song với Oy thì phương trình của d có dạng: $d: y=ax+b$.

Khi đó: $\begin{cases} d(I_1,d)=2 \\ d(I_1,d)=d(I_2,d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|-1+b|}{\sqrt{a^2+1}}=2 \\ \dfrac{|-1+b|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{|4a-4+b|}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{3}{4};\, b=\dfrac{7}{2} \\ a=\dfrac{3}{4}; b=-\dfrac{3}{2} \\ a=-\dfrac{7}{24}; b=\dfrac{37}{12} \end{array}\right.$

$\Rightarrow d: 3x-4y+14=0$ hoặc $d: 3x-4y-6=0$ hoặc $d: 7x+24y-74=0$.

Vậy: $d: x-2=0$; $d: 3x-4y+14=0$; $d: 3x-4y-6=0$; $d: 7x+24y-74=0$.

HT 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4y-5=0$ và $(C_2): x^2+y^2-6x+8y+16=0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Giải

(C_1) có tâm $I_1(0;1)$, bán kính $R_1=3$; (C_2) có tâm $I_2(3;-4)$, bán kính $R_2=3$.

Giả sử tiếp tuyến chung Δ của (C_1), (C_2) có phương trình: $ax+by+c=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$.

Δ là tiếp tuyến chung của (C_1), $(C_2) \Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1,\Delta)=R_1 \\ d(I_2,\Delta)=R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c|=3\sqrt{a^2+b^2} & (1) \\ |3a-4b+c|=3\sqrt{a^2+b^2} & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra $a=2b$ hoặc $c=\dfrac{-3a+2b}{2}$.

+ TH1: Với $a=2b$. Chọn $b=1 \Rightarrow a=2, c=-2\pm 3\sqrt{5} \Rightarrow \Delta: 2x+y-2\pm 3\sqrt{5}=0$

+ TH2: Với $c=\dfrac{-3a+2b}{2}$. Thay vào (1) ta được: $|a-2b|=2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-\dfrac{4}{3}b \end{array}\right.$.

$\Rightarrow \Delta: y+2=0$ hoặc $\Delta: 4x-3y-9=0$.

HT 57. Trong mặt phẳng $Oxy,$ cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0$. Tia Oy cắt (C) tại điểm A. Lập phương trình đường tròn (T) có bán kính R′ = 2 sao cho (T) tiếp xúc ngoài với (C) tại A.

Giải

(C) có tâm $I(-2\sqrt{3};0)$, bán kính $R = 4$. Tia Oy cắt (C) tại $A(0;2)$. Gọi J là tâm của (T).

Phương trình IA: $\begin{cases} x = 2\sqrt{3}t \\ y = 2t + 2 \end{cases}$. Giả sử $J(2\sqrt{3}t;2t+2) \in (IA)$.

(T) tiếp xúc ngoài với (C) tại A nên $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{JA} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow J(\sqrt{3};3)$.

Vậy: $(T): (x-\sqrt{3})^2 + (y-3)^2 = 4$.

HT 58. Trong mặt phẳng $Oxy,$ cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$ và phương trình: $x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0$ (1). Chứng minh rằng phương trình (1) là phương trình của đường tròn với mọi m. Gọi các đường tròn tương ứng là (C_m). Tìm m để (C_m) tiếp xúc với (C).

Giải

(C_m) có tâm $I(m+1;-2m)$, bán kính $R' = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2 + 5}$,

(C) có tâm O(0; 0) bán kính R = 1, OI $= \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2}$, ta có OI < R′

Vậy (C) và (C_m) chỉ tiếp xúc trong. ⇒ R′ – R = OI (vì R′ > R) ⇒ $m = -1;\ m = \frac{3}{5}$.

HT 59. Trong mặt phẳng $Oxy,$ cho các đường tròn có phương trình $(C_1): (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ và $(C_2): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$. Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với (C_1) và cắt (C_2) tại hai điểm M, N sao cho $MN = 2\sqrt{2}$.

Giải

(C_1) có tâm $I_1(1;0)$, bán kính $R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; (C_2) có tâm $I_1(2;2)$, bán kính $R_2 = 2$. Gọi H là trung điểm của MN ⇒ $d(I_2,d) = I_2H = \sqrt{R_2^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$

Phương trình đường thẳng d có dạng: $ax + by + c = 0\ (a^2 + b^2 \neq 0)$.

Ta có: $\begin{cases} d(I_1,d) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ d(I_2,d) = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}|a+c| = \sqrt{a^2+b^2} \\ |2a + 2b + c| = \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$. Giải hệ tìm được a, b, c.

Vậy: $d: x + y - 2 = 0;\ d: x + 7y - 6 = 0;\ d: x - y - 2 = 0;\ d: 7x - y - 2 = 0$

HT 60. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ $Oxy,$ cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$. Tìm điểm M thuộc trục tung sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến của (C) mà góc giữa hai tiếp tuyến đó bằng 60^0.

Giải

(C) có tâm I(3;0) và bán kính R = 2. Gọi M(0; m) ∈ Oy

Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB ⇒ $\left[\begin{array}{l} \widehat{AMB} = 60^0 \quad (1) \\ \widehat{AMB} = 120^0 \; (2) \end{array}\right.$

Vì MI là phân giác của $\widehat{AMB}$ nên:

(1) ⇔ $\widehat{AMI}$ = 30^0 ⇔ $MI = \dfrac{IA}{\sin 30^0}$ ⇔ MI = 2R ⇔ $\sqrt{m^2 + 9} = 4 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{7}$

(2) ⇔ $\widehat{AMI}$ = 60^0 ⇔ $MI = \dfrac{IA}{\sin 60^0}$ ⇔ MI = $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ R ⇔ $\sqrt{m^2 + 9} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ Vô nghiệm Vậy có hai điểm $M_1(0; \sqrt{7})$ và $M_2(0; -\sqrt{7})$

HT 61. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho đường tròn (C) và đường thẳng Δ định bởi: $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0; \;\; \Delta: x + 2y - 12 = 0$. Tìm điểm M trên Δ sao cho từ M vẽ được với (C) hai tiếp tuyến lập với nhau một góc 60^0.

Giải

Đường tròn (C) có tâm I(2;1) và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Gọi A, B là hai tiếp điểm. Nếu hai tiếp tuyến này lập với nhau một góc 60^0 thì IAM là nửa tam giác đều suy ra $IM = 2R = 2\sqrt{5}$.

Như thế điểm M nằm trên đường tròn (T) có phương trình: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20$.

Mặt khác, điểm M nằm trên đường thẳng Δ, nên tọa độ của M nghiệm đúng hệ phương trình: $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 20 & (1) \\ x + 2y - 12 = 0 & (2) \end{cases}$

Khử x giữa (1) và (2) ta được: $\left(-2y+10\right)^2 + \left(y-1\right)^2 = 20 \Leftrightarrow 5y^2 - 42y + 81 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = \dfrac{27}{5} \end{array}\right.$

Vậy có hai điểm thỏa mãn đề bài là: $M\left(6;3\right)$ hoặc $M\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{27}{5}\right)$

HT 62. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và đường thẳng $d: x + y + m = 0$. Tìm m để trên đường thẳng d có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới

đường tròn (C) (B, C là hai tiếp điểm) sao cho tam giác ABC vuông.

Giải

(C) có tâm I(1; –2), R = 3. ABIC là hình vuông cạnh bằng 3 $\Rightarrow IA = 3\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{|m-1|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |m-1| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-5 \\ m=7 \end{array}\right.$$

Câu hỏi tương tự:

a) $(C): x^2+y^2=1,\ d: x-y+m=0$ ĐS: $m=\pm 2$.

HT 63. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d: 3x-4y+m=0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới đường tròn (C) (A, B là hai tiếp điểm) sao cho PAB là tam giác đều.

• (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$. ΔPAB đều $\Rightarrow PI = 2AI = 2R = 6$ ⇒ P nằm trên đường tròn (T) có tâm I, bán kính $r=6$. Do trên d có duy nhất một điểm P thoả YCBT nên d là tiếp tuyến của (T) ⇒ $d(I,d)=6 \Leftrightarrow \frac{|11+m|}{5}=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=19 \\ m=-41 \end{array}\right.$.

HT 64. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hai đường tròn $(C): x^2+y^2-18x-6y+65=0$ và $(C'): x^2+y^2=9$. Từ điểm M thuộc đường tròn (C) kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn (C′), gọi A, B là các tiếp điểm. Tìm tọa độ điểm M, biết độ dài đoạn AB bằng $4,8$.

• (C′) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=OA=3$. Gọi $H = AB \cap OM \Rightarrow$ H là trung điểm của AB ⇒ $AH = \frac{12}{5}$. Suy ra: $OH = \sqrt{OA^2-AH^2} = \frac{9}{5}$ và $OM = \frac{OA^2}{OH} = 5$.

Giả sử $M(x;y)$. Ta có: $\begin{cases} M \in (C) \\ OM = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-18x-6y+65=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy $M(4;3)$ hoặc $M(5;0)$.

HT 65. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y+2)^2=4$. M là điểm di động trên đường thẳng $d: y=x+1$. Chứng minh rằng từ M kẻ được hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (C) (T_1, T_2 là tiếp điểm) và tìm toạ độ điểm M, biết đường thẳng T_1T_2 đi qua điểm $A(1;-1)$.

• (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=2$. Giả sử $M(x_0;x_0+1) \in d$.

$IM = \sqrt{(x_0-1)^2+(x_0+3)^2} = \sqrt{2(x_0+1)^2+8} > 2 = R$ ⇒ M nằm ngoài (C) ⇒ qua M kẻ được 2 tiếp tuyến tới (C).

Gọi J là trung điểm IM $\Rightarrow J\left(\frac{x_0+1}{2};\frac{x_0-1}{2}\right)$. Đường tròn (T) đường kính IM có tâm J bán kính $R_1=\frac{IM}{2}$ có phương trình $(T):\left(x-\frac{x_0+1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{x_0-1}{2}\right)^2=\frac{(x_0-1)^2+(x_0+3)^2}{4}$

Từ M kẻ được 2 tiếp tuyến MT_1, MT_2 đến (C) $\Rightarrow \widehat{IT_1M}=\widehat{IT_2M}=90^0 \Rightarrow T_1,T_2\in(T)$

$\Rightarrow \{T_1,T_2\}=(C)\cap(T) \Rightarrow$ toạ độ T_1, T_2 thoả mãn hệ:

$$\begin{cases}(x-\frac{x_0+1}{2})^2+(y-\frac{x_0-1}{2})^2=\frac{(x_0-1)^2+(x_0+3)^2}{4}\\(x-1)^2+(y+2)^2=4\end{cases} \Rightarrow (1-x_0)x-(3+x_0)y-x_0-3=0 \quad (1)$$

Toạ độ các điểm T_1, T_2 thoả mãn (1), mà qua 2 điểm phân biệt xác định duy nhất 1 đường thẳng nên phương trình T_1T_2 là $x(1-x_0)-y(3+x_0)-x_0-3=0$.

$A(1;-1)$ nằm trên T_1T_2 nên $1-x_0+(3+x_0)-x_0-3=0 \Leftrightarrow x_0=1 \Rightarrow M(1;2)$.

HT 66. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y+1)^2=25$ và điểm M(7; 3). Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho MA = 3MB.

- $P_{M/(C)}=27>0 \Rightarrow$ M nằm ngoài (C). (C) có tâm I(1;–1) và R = 5.

Mặt khác:

$$P_{M/(C)}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=3MB^2 \Rightarrow MB=3 \Rightarrow BH=3 \Rightarrow IH=\sqrt{R^2-BH^2}=4=d[M,(d)]$$

Ta có: pt(d): a(x – 7) + b(y – 3) = 0 ($a^2+b^2>0$).

$d[M,(d)]=4 \Leftrightarrow \frac{|-6a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\a=-\frac{12}{5}b\end{array}\right.$. Vậy (d): y – 3 = 0 hoặc (d): 12x – 5y – 69 = 0.

HT 67. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm A(1; 2) và cắt đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ theo một dây cung có độ dài bằng $l=8$.

- d: a(x – 1)+ b(y –2) = 0 ⇔ ax + by – a – 2b = 0 ($a^2+b^2>0$)

Vì d cắt (C) theo dây cung có độ dài $l=8$ nên khoảng cách từ tâm I(2; –1) của (C) đến d bằng 3.

$$d(I,d)=\left|\frac{2a-b-a-2b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=3 \Leftrightarrow |a-3b|=3\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 8a^2+6ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\a=-\frac{3}{4}b\end{array}\right.$$

- a = 0: chọn b = 1 ⇒ d: y – 2 = 0 • a = $-\frac{3}{4}b$: chọn a = 3, b = – 4 ⇒ d: 3x – 4 y + 5 = 0.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) d đi qua O, $(C): x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$, $l = 8$. ĐS: $d: 3x - 4y = 0$; $d: y = 0$.

b) d đi qua $Q(5;2)$, $(C): x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$, $l = 5\sqrt{2}$.

ĐS: $d: x - y - 3 = 0$; $d: 17x - 7y - 71 = 0$.

c) d đi qua $A(9;6)$, $(C): x^2 + y^2 - 8x - 2y = 0$, $l = 4\sqrt{3}$.

ĐS: $d: y = 2x - 12$; $d: y = -\frac{1}{2}x + \frac{21}{2}$

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 68. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 2 = 0$ và cắt đường tròn (C) theo một dây cung có độ dài $l = 6$.

• (C) có tâm I(–1; 4), bán kính R = 5. PT đường thẳng Δ có dạng: $3x + y + c = 0,\ c \neq 2$.

Vì Δ cắt (C) theo một dây cung có độ dài bằng 6 nên:

$$\Rightarrow d(I,\Delta) = \frac{|-3+4+c|}{\sqrt{3^2+1}} = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 4\sqrt{10} - 1 \\ c = -4\sqrt{10} - 1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình Δ cần tìm là: $3x + y + 4\sqrt{10} - 1 = 0$ hoặc $3x + y - 4\sqrt{10} - 1 = 0$.

Câu hỏi tương tự:

a) $(C): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 3$, $d: 3x - 4y + 2012 = 0$, $l = 2\sqrt{5}$.

ĐS: $\Delta: 3x - 4y + 5 = 0$; $\Delta: 3x - 4y - 15 = 0$.

HT 69. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$ và đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 10 = 0$. Lập phương trình đường thẳng d biết $d \perp (\Delta)$ và d cắt (C) tại A, B sao cho AB = 6.

• (C) có tâm I(– 4; 3) và có bán kính R = 5. Gọi H là trung điểm AB, AH = 3. Do $d \perp \Delta$ nên PT của d có dạng: $4x + 3y + m = 0$.

Ta có: $d(I,(\Delta_1))$ = IH = $\sqrt{AI^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Leftrightarrow \frac{|-16+9+m|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 27 \\ m = -13 \end{array}\right.$

Vậy PT các đường thẳng cần tìm là: $4x + 3y + 27 = 0$ và $4x + 3y - 13 = 0$.

HT 70. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ và điểm M(0; 2). Viết phương trình đường thẳng d qua M và cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho AB có độ dài ngắn nhất.

• (C) có tâm I(1; 1) và bán kính R = $\sqrt{5}$. IM = $\sqrt{2} < \sqrt{5} \Rightarrow$ M nằm trong đường tròn (C).

Giả sử d là đường thẳng qua M và H là hình chiếu của I trên d.

Ta có: AB = 2AH = $2\sqrt{IA^2 - IH^2} = 2\sqrt{5 - IH^2} \geq 2\sqrt{5 - IM^2} = 2\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra ⇔ H ≡ M hay d ⊥ IM. Vậy d là đường thẳng qua M và có VTPT $\overrightarrow{MI} = (1;-1)$

⇒ Phương trình d: $x - y + 2 = 0$.

Câu hỏi tương tự:

a) Với (C): $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 16 = 0$, M(–1; 0). ĐS: $d: 5x + 2y + 5 = 0$

HT 71. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm O, bán kính R = 5 và điểm M(2; 6). Viết phương trình đường thẳng d qua M, cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho ΔOAB có diện tích lớn nhất.

• Tam giác OAB có diện tích lớn nhất ⇔ ΔOAB vuông cân tại O. Khi đó $d(O,d) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Giả sử phương trình đường thẳng d: $A(x-2) + B(y-6) = 0 \ (A^2 + B^2 \neq 0)$

$$d(O,d) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|-2A - 6B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 47B^2 + 48AB - 17A^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = \frac{-24 - 5\sqrt{55}}{47}A \\ B = \frac{-24 + 5\sqrt{55}}{47}A \end{array}\right.$$

+ Với $B = \frac{-24 - 5\sqrt{55}}{47}A$: chọn A = 47 ⇒ B = $-24 - 5\sqrt{55}$

⇒ d: $47(x-2) - \left(24 + 5\sqrt{55}\right)(y-6) = 0$

+ Với $B = \frac{-24 + 5\sqrt{55}}{47}A$: chọn A = 47 ⇒ B = $-24 + 5\sqrt{55}$

⇒ d: $47(x-2) + \left(-24 + 5\sqrt{55}\right)(y-6) = 0$

Câu hỏi tương tự:

a) $(C): x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$, $M(1;-8)$. ĐS: $7x + y + 1 = 0$; $17x + 7y + 39 = 0$.

HT 72. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ và điểm $A(3;3)$. Lập phương trình đường thẳng d qua A và cắt (C) tại hai điểm sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó bằng độ dài cạnh hình vuông nội tiếp đường tròn (C).

• (C) có tâm I(3; –1), R = 4. Ta có: A(3 ;3) ∈ (C).

PT đường thẳng d có dạng: $a(x-3) + b(y-3) = 0,\ a^2 + b^2 \neq 0 \Leftrightarrow ax + by - 3a - 3b = 0$.

Giả sử d qua A cắt (C) tại hai điểm A, B ⇒ AB = $4\sqrt{2}$. Gọi I là tâm hình vuông.

Ta có: $d(I,d) = 2\sqrt{2} \ (= \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB) \Leftrightarrow \frac{|3a - b - 3a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |4b| = 2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$. Chọn b = 1 thì a = 1 hoặc a = –1.

Vậy phương trình các đường thẳng cần tìm là: $x + y - 6 = 0$ hoặc $x - y = 0$.

HT 73. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hai đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 = 13$ và (C_2): $(x-6)^2 + y^2 = 25$. Gọi A là một giao điểm của (C_1) và (C_2) với $y_A > 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và cắt (C_1), (C_2) theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

• (C_1) có tâm O(0; 0), bán kính $R_1 = \sqrt{13}$. (C_2) có tâm I_2(6; 0), bán kính R_2 = 5. Giao điểm A(2; 3). Giả sử d: $a(x-2) + b(y-3) = 0$ $(a^2+b^2 \neq 0)$. Gọi $d_1 = d(O,d)$, $d_2 = d(I_2,d)$.

Từ giả thiết $\Rightarrow R_1^2 - d_1^2 = R_2^2 - d_2^2 \Leftrightarrow d_2^2 - d_1^2 = 12 \Leftrightarrow \dfrac{(6a-2a-3b)^2}{a^2+b^2} - \dfrac{(-2a-3b)^2}{a^2+b^2} = 12$

$\Leftrightarrow b^2 + 3ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = -3a \end{array}\right.$.

• Với b = 0: Chọn a = 1 ⇒ Phương trình d: $x - 2 = 0$.

• Với b = –3a: Chọn a = 1, b = –3 ⇒ Phương trình d: $x - 3y + 7 = 0$.

HT 74. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ: $mx + 4y = 0$, đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2my + m^2 - 24 = 0$ có tâm I. Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 12.

• (C) có tâm $I(1;m)$, bán kính R = 5. Gọi H là trung điểm của dây cung AB.

$$IH = d(I,\Delta) = \frac{|m+4m|}{\sqrt{m^2+16}} = \frac{|5m|}{\sqrt{m^2+16}};\ AH = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \sqrt{25 - \frac{(5m)^2}{m^2+16}} = \frac{20}{\sqrt{m^2+16}}$$

$$S_{\Delta IAB} = 12 \Leftrightarrow d(I,\Delta).AH = 12 \Leftrightarrow 3m^2 - 25|m| + 48 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 3 \\ m = \pm \frac{16}{3} \end{array}\right.$$

HT 75. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$, đường thẳng $(d): x + y + m = 0$. Tìm m để (C) cắt (d) tại A và B sao cho diện tích tam giác ABO lớn nhất.

• (C) có tâm O(0; 0) , bán kính R = 1. (d) cắt (C) tại A, B $\Leftrightarrow d(O;d) < 1$

Khi đó: $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB.\sin\widehat{AOB} = \dfrac{1}{2}.\sin\widehat{AOB} \le \dfrac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra ⇔ $\widehat{AOB} = 90^0$.

Vậy S_{AOB} lớn nhất ⇔ $\widehat{AOB} = 90^0$. Khi đó $d(I;d) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \pm 1$.

HT 76. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường thẳng (d): $\sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$ và đường tròn có phương

trình $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Gọi I là tâm đường tròn (C). Tìm m sao cho (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Với giá trị nào của m thì diện tích tam giác IAB lớn nhất và tính giá trị đó.

• (C) có tâm I (1; –2) và bán kính R = 3.

(d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow d(I,d) < R$ $\Leftrightarrow \left|\sqrt{2} - 2m + 1 - \sqrt{2}\right| < 3\sqrt{2 + m^2}$

$$\Leftrightarrow 1 - 4m + 4m^2 < 18 + 9m^2 \Leftrightarrow 5m^2 + 4m + 17 > 0 \Leftrightarrow m \in R$$

Ta có: $S_{IAB} = \frac{1}{2} IA.IB \sin\widehat{AIB} \le \frac{1}{2} IA.IB = \frac{9}{2}$

Vậy: S_{IAB} lớn nhất là $\frac{9}{2}$ khi $\widehat{AIB} = 90^0$ $\Leftrightarrow$ AB = $R\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow d(I,d) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \left|1 - 2m\right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{2 + m^2} \Leftrightarrow 2m^2 + 16m + 32 = 0 \Leftrightarrow m = -4$

Câu hỏi tương tự:

a) Với $d: x + my - 2m + 3 = 0$, $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$. ĐS: $m = 0 \vee m = \frac{8}{15}$

HT 77. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ và điểm $M(1;-8)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M, cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho tam giác ABI có diện tích lớn nhất, với I là tâm của đường tròn (C).

• (C) có tâm $I(-2;3)$, bán kính $R = 2$.

PT đường thẳng d qua $M(1;-8)$ có dạng: $d: ax + by - a + 8b = 0$ ($a^2 + b^2 \ne 0$).

$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA.IB.\sin\widehat{AIB} = 2\sin\widehat{AIB}$.

Do đó: $S_{\Delta IAB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^0 \Leftrightarrow d(I,d) = IA\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\left|11b - 3a\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 7a^2 - 66ab + 118b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 7b \\ 7a = 17b \end{array}\right.$.

+ Với $b = 1 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow d: 7x + y + 1 = 0$ + Với $b = 7 \Rightarrow a = 17 \Rightarrow d: 17x + 7y + 39 = 0$

HT 78. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng Δ: $x + my - 2m + 3 = 0$ với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho diện tích ΔIAB lớn nhất.

• (C) có tâm là I (–2; –2); R = $\sqrt{2}$. Giả sử Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

Kẻ đường cao IH của ΔIAB, ta có: $S_{\Delta ABC}$ = $S_{IAB} = \frac{1}{2} IA.IB.\sin\widehat{AIB}$ = $\sin\widehat{AIB}$

Do đó S_{IAB} lớn nhất ⇔ sin $\widehat{AIB}$ = 1 ⇔ ΔAIB vuông tại I ⇔ IH = $\frac{IA}{\sqrt{2}} = 1$ (thỏa IH < R)

⇔ $\frac{\left|1-4m\right|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$ ⇔ 15m² – 8m = 0 ⇔ m = 0 hay m = $\frac{8}{15}$

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) Với $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, $\Delta: \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$. ĐS: $m = -4$.

b) Với $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$, $\Delta: x + my - 2 = 0$. ĐS: $m = -2$

HT 79. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: $x - 5y - 2 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$. Xác định tọa độ các giao điểm A, B của đường tròn (C) và đường thẳng d (cho biết điểm A có hoành độ dương). Tìm tọa độ C thuộc đường tròn (C) sao cho tam giác ABC vuông ở B.

• Tọa độ giao điểm A, B là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0 \\ x - 5y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0; x = 2 \\ y = -1; x = -3 \end{cases}$. Vì $x_A > 0$ nên ta được A(2;0), B(–3;–1).

Vì $\widehat{ABC} = 90^0$ nên AC là đường kính đường tròn, tức điểm C đối xứng với điểm A qua tâm I của đường tròn. Tâm I(–1;2), suy ra C(–4;4).

HT 80. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$ và đường thẳng (Δ): $2x - 3y - 1 = 0$. Chứng minh rằng (Δ) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm toạ độ điểm M trên đường tròn (C) sao cho diện tích tam giác ABM lớn nhất.

• (C) có tâm I(–1; 2), bán kính R = $\sqrt{13}$. $d(I,\Delta) = \frac{9}{\sqrt{13}} < R$ ⇒ đường thẳng (Δ) cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt. Gọi M là điểm nằm trên (C), ta có $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}AB.d(M,\Delta)$. Trong đó AB không đổi nên $S_{\Delta ABM}$ lớn nhất ⇔ $d(M,\Delta)$ lớn nhất.

Gọi d là đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với (Δ). PT đường thẳng d là $3x + 2y - 1 = 0$.

Gọi P, Q là giao điểm của đường thẳng d vời đường tròn (C). Toạ độ P, Q là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = -1 \\ x = -3, y = 5 \end{array}\right.$ ⇒ P(1; –1); Q(–3; 5)

Ta có $d(P,\Delta) = \frac{4}{\sqrt{13}}$; $d(Q,\Delta) = \frac{22}{\sqrt{13}}$. Như vậy $d(M,\Delta)$ lớn nhất ⇔ M trùng với Q.

Vậy tọa độ điểm M(–3; 5).

HT 81. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ và A(0; –1) ∈ (C). Tìm toạ độ các điểm B, C thuộc đường tròn (C) sao cho ΔABC đều.

• (C) có tâm I(1;2) và R= $\sqrt{10}$. Gọi H là trung điểm BC. Suy ra $\overrightarrow{AI} = 2.\overrightarrow{IH} \Leftrightarrow H\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$

ΔABC đều ⇒ I là trọng tâm. Phương trình (BC): $x + 3y - 12 = 0$

Vì B, C ∈ (C) nên tọa độ của B, C là các nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0 \\ x = 12 - 3y \end{cases}$$

Giải hệ PT trên ta được: $B\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2};\frac{3-3\sqrt{3}}{2}\right);C\left(\frac{7-\sqrt{3}}{2};\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)$ hoặc ngược lại.

HT 82. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 35$ và điểm A(5; 5). Tìm trên (C) hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

• (C) có tâm I(3; 4). Ta có: $\begin{cases} AB = AC \\ IB = IC \end{cases}$ ⇒ AI là đường trung trực của BC. ΔABC vuông cân tại A nên AI cũng là phân giác của $\widehat{BAC}$. Do đó AB và AC hợp với AI một góc 45^0 .

Gọi d là đường thẳng qua A và hợp với AI một góc 45^0 . Khi đó B, C là giao điểm của d với (C) và AB = AC. Vì $\overrightarrow{IA} = (2;1)$ ≠ (1; 1), (1; –1) nên d không cùng phương với các trục toạ độ ⇒ VTCP của d có hai thành phần đều khác 0. Gọi $\vec{u} = (1;a)$ là VTCP của d. Ta có:

$$\cos\left(\overrightarrow{IA},\vec{u}\right) = \frac{|2+a|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{2^2+1}} = \frac{|2+a|}{\sqrt{5}\sqrt{1+a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\,|2+a| = \sqrt{5}\sqrt{1+a^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

+ Với a = 3, thì $\vec{u} = (1;3)$ ⇒ Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$.

Ta tìm được các giao điểm của d và (C) là: $\left(\frac{9+\sqrt{13}}{2};\frac{7+3\sqrt{13}}{2}\right), \left(\frac{9-\sqrt{13}}{2};\frac{7-3\sqrt{13}}{2}\right)$

+ Với a = $-\frac{1}{3}$, thì $\vec{u} = \left(1;-\frac{1}{3}\right)$ ⇒ Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 5 - \frac{1}{3}t \end{cases}$.

Ta tìm được các giao điểm của d và (C) là: $\left(\frac{7+3\sqrt{13}}{2};\frac{11-\sqrt{13}}{2}\right), \left(\frac{7-3\sqrt{13}}{2};\frac{11+\sqrt{13}}{2}\right)$

+Vì AB = AC nên ta có hai cặp điểm cần tìm là: $\left(\frac{7+3\sqrt{13}}{2};\frac{11-\sqrt{13}}{2}\right), \left(\frac{9+\sqrt{13}}{2};\frac{7+3\sqrt{13}}{2}\right)$

và $\left(\frac{7-3\sqrt{13}}{2};\frac{11+\sqrt{13}}{2}\right), \left(\frac{9-\sqrt{13}}{2};\frac{7-3\sqrt{13}}{2}\right)$

HT 83. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 4$ và các điểm $A\left(1; -\frac{8}{3}\right)$, $B(3;0)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc (C) sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $\frac{20}{3}$.

• $AB = \sqrt{4 + \frac{64}{9}} = \frac{10}{3}$; $AB: 4x - 3y - 12 = 0$. Gọi M(x;y) và $h = d(M, AB)$.

Ta có: $\frac{1}{2}h.AB = \frac{20}{3} \Leftrightarrow h = 4 \Leftrightarrow \frac{|4x - 3y - 12|}{5} = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - 3y + 8 = 0 \\ 4x - 3y - 32 = 0 \end{array}\right.$

+ $\begin{cases} 4x - 3y + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow M(-2;0); M\left(-\frac{14}{25}; \frac{48}{75}\right)$ + $\begin{cases} 4x - 3y - 32 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ (vô nghiệm)

HT 84. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$ và đường thẳng $d: 3x - 4y + 5 = 0$. Tìm những điểm M ∈ (C) và N ∈ d sao cho MN có độ dài nhỏ nhất.

• (C) có tâm $I(-1;3)$, bán kính $R = 1 \Rightarrow d(I,d) = 2 > R \Rightarrow d \cap (C) = \varnothing$.

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với d ⇒ $(\Delta): 4x + 3y - 5 = 0$.

Gọi $N_0 = d \cap \Delta \Rightarrow N_0\left(\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right)$.

Gọi M_1, M_2 là các giao điểm của Δ và (C) ⇒ $M_1\left(-\frac{2}{5}; \frac{11}{5}\right), M_2\left(-\frac{8}{5}; \frac{19}{5}\right)$

⇒ MN ngắn nhất khi $M \equiv M_1, N \equiv N_0$.

Vậy các điểm cần tìm: $M\left(-\frac{2}{5}; \frac{11}{5}\right) \in (C)$, $N\left(\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right) \in d$.

PHẦN III CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TAM GIÁC

HT 85. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có 3 đỉnh $A(-5;3), B(2;-1), C(-1;3)$.
a) Viết phương trình ba cạnh của tam giác.
b) Viết phương trình đường trung tuyến AM
c) Viết phương trình đường cao BH
d) Viết phương trình đường trung trực d của cạnh AC.
e) Viết phương trình đường phân giác trong đỉnh C.

Giải

a) Cạnh $AB\begin{cases} qua\ A(-5;3) \\ vtcp\ \overrightarrow{AB}=(7;-4) \end{cases} \Rightarrow AB:\dfrac{x+5}{7}=\dfrac{y-3}{-4}$

Cạnh $AC:\begin{cases} qua\ A(-5;3) \\ vtcp\ \overrightarrow{AC}=(4;0) \end{cases} \Rightarrow AC:\begin{cases} x=-5+4t \\ y=3 \end{cases}$

Cạnh $BC:\begin{cases} qua\ B(2;-1) \\ vtcp\ \overrightarrow{BC}=(-3;4) \end{cases} \Rightarrow BC:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{x+1}{4}$

b) Ta có, M là trung điểm của BC $\Rightarrow M(\dfrac{1}{2};1)$

Phương trình đường trung tuyến $AM:\begin{cases} qua\ A(-5;3) \\ vtcp\ \overrightarrow{AM}=(\dfrac{11}{2};-2) \end{cases} \Rightarrow AM:\dfrac{x+5}{\dfrac{11}{2}}=\dfrac{x-3}{-2}$

c) Đường cao $BH:\begin{cases} qua\ B(2;-1) \\ vtpt\ \overrightarrow{AC}=(4;0) \end{cases} \Rightarrow BH:\begin{cases} x=2+4t \\ y=1 \end{cases}$

d) Gọi N là trung điểm của AC $\Rightarrow N(-3;3)$

Đường trung trực của AC : $d:\begin{cases} qua\ N(-3;3) \\ vtpt\ \overrightarrow{AC}=(4;0) \end{cases} \Rightarrow d:\begin{cases} x=-3+4t \\ y=3 \end{cases}$

e) Ta có : $BC: 4x+3y-5=0$; $AC: y-3=0$

Phương trình đường phân giác góc tạo bởi BC và AC là :

$$\frac{4x+3y-5}{5}=\pm\frac{y-3}{1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+3y-5=5y-15 \\ 4x+3y-5=-5y+15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x-y+5=0 & (l_1) \\ x+2y-5=0 & (l_2) \end{array}\right.$$

Xét vị trí tương đối của A và B so với l_1

Ta có : $t_A=2.(-5)-3+5=-8$; $t_B=2.2+1+5=10$

$\Rightarrow t_A.t_B = -80 < 0$ Vậy, A và B nằm khác phía so với l_1 nên l_1 là đường phân giác trong đỉnh C.

HT 86. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho tam giác ABC có $A(2;2)$ và phương trình hai đường cao kẻ từ B và C lần lượt là: $d_1 : 9x - 3y - 4 = 0; d_2 : x + y - 2 = 0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Giải

Lập phương trình AC :

Ta có : $AC \perp d_1 \Rightarrow AC : x + 3y + c_1 = 0$

AC qua $A(2;2) \Rightarrow c_1 = -8 \Rightarrow AC : x + 3y - 8 = 0$

Lập phương trình AB :

Ta có : $AB \perp d_2 \Rightarrow AB : x - y + c_2 = 0$

AB qua $A(2;2) \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow AB : x - y = 0$

Lập phương trình BC :

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} x - y = 0 \\ 9x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} x + 3y - 8 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow C(-1;3)$

Vậy, $BC : \begin{cases} qua\, C(-1;3) \\ vtcp\, \overrightarrow{BC} = (-\dfrac{5}{7};\dfrac{7}{3}) \end{cases} \Rightarrow BC : 7x + 5y - 8 = 0$

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 87. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho tam giác ABC có phương trình hai đường cao lần lượt là: $AH : 4x - y - 1 = 0$ và $BK : x - y + 3 = 0$, trọng tâm tam giác $G(1;2)$. Viết phương trình các cạnh của tam giác.

Giải

Tọa độ điểm $A(a;4a - 1); B(b;b + 3)$

Hệ thức trọng tâm trong tam giác :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{a + b + x_C}{3} \\ 2 = \dfrac{4a - 1 + b + 3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3 - a - b \\ y_C = 4 - 4a - b \end{cases} \Leftrightarrow C(3 - a - b; 4 - 4a - b)$$

$\overrightarrow{AC} = (3 - 2a - b; 5 - 8a - b)$; $\overrightarrow{BC} = (3 - a - 2b; 1 - 4a - 2b)$

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BK \\ BC \perp AH \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u_{BK}} = 0 \\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{u_{AH}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2a-b+5-8a-b=0 \\ 3-a-2b+4-16a-8b=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 5a+b=4 \\ 17a+10b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

Vậy, $A(1;3), B(-1;2), C(3;1)$

Phương trình các cạnh (học sinh tự viết)

$AB: x-2y+5=0; AC: x+y-4=0, BC: x+4y-7=0$

HT 88. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho tam giác ABC có đỉnh A(1; 3) và hai đường trung tuyến của nó có phương trình là: $x-2y+1=0$ và $y-1=0$. Hãy viết phương trình các cạnh của ΔABC.

Giải

Thay tọa độ điểm A vào phương trình hai đường trung tuyến ta thấy không thỏa mãn.

Không mất tính tổng quát, đặt trung tuyến $BM: x-2y+1=0$, trung tuyến $CN: y-1=0$

Tọa độ trọng tâm G là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x-2y+1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow G(1;1)$

Ta có, tọa độ $B(2b-1;b); C(c;1)$

Hệ thức trọng tâm tam giác: $\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{1+2b-1+c}{3} \\ 1 = \dfrac{3+b+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=5 \end{cases}$

Vậy, $B(-3;-1), C(5;1)$

Phương trình ba cạnh (học sinh tự viết)

• (AC): x + 2y – 7 = 0; (AB): x – y + 2 = 0; (BC): x – 4y – 1 = 0.

HT 89. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho tam giác ABC có $A(2;1)$. Đường cao BH có phương trình $x-3y-7=0$. Đường trung tuyến CM có phương trình $x+y+1=0$. Xác định toạ độ các đỉnh B, C. Tính diện tích tam giác ABC.

Giải

• AC qua A và vuông góc với đường cao BH $\Rightarrow (AC): x-3y-7=0$.

Toạ độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-3y-7=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow C(4;-5)$.

Trung điểm M của AB có: $x_M = \dfrac{2+x_B}{2}$; $y_M = \dfrac{1+y_B}{2}$. $M \in (CM) \Rightarrow \dfrac{2+x_B}{2} + \dfrac{1+y_B}{2} + 1 = 0$.

Toạ độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-3y-7=0 \\ \dfrac{2+x_B}{2}+\dfrac{1+y_B}{2}+1=0 \end{cases} \Rightarrow B(-2;-3).$

Toạ độ điểm H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-3y-7=0 \\ 3x+y-7=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{14}{5};-\dfrac{7}{5}\right).$

$BH=\dfrac{8\sqrt{10}}{5};\ AC=2\sqrt{10} \Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AC.BH=\dfrac{1}{2}.2\sqrt{10}.\dfrac{8\sqrt{10}}{5}=16$ ***(đvdt).***

HT 90. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho ΔABC có tọa độ đỉnh *B*(3; 5), phương trình đường cao hạ từ đỉnh A và đường trung tuyến hạ từ đỉnh *C* lần lượt là d_1 : 2*x* – 5*y* + 3 = 0 và d_2 : *x* + *y* – 5 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh *A* và *C* của tam giác *ABC*.

Giải

•*Gọi M là trung điểm AB thì M ∈* d_2 *nên* $M(a;5-a)$. *Đỉnh A ∈* d_1 *nên* $A\left(\dfrac{5b-3}{2};b\right)$.

M là trung điểm AB: $\begin{cases} x_A+x_B=2x_M \\ y_A+y_B=2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-5b=3 \\ 2a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ *⇒A(1; 1).*

Phương trình BC: $5x+2y-25=0$; $C=d_2\cap BC$ *⇒C(5; 0).*

HT 91. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ 0*xy*, cho tam giác ABC có $A(4;-2)$, phương trình đường cao kẻ từ C và đường trung trực của BC lần lượt là: $x-y+2=0$, $3x+4y-2=0$. Tìm toạ độ các đỉnh B và C.

Giải

•*Đường thẳng AB qua A và vuông góc với đường cao CH* $\Rightarrow (AB): x-y+2=0$.

Gọi $B(b;2-b)\in(AB)$, $C(c;c+2)\in(CH)$ *⇒Trung điểm M của BC:* $M\left(\dfrac{b+c}{2};\dfrac{4-b+c}{2}\right)$.

Vì M thuộc trung trực của BC nên: $3(b+c)+4(4-b+c)-4=0 \Leftrightarrow -b+7c+12=0$ *(1)*

$\overrightarrow{BC}=(c-b;c+b)$ *là 1 VTPT của trung trực BC nên* $4(c-b)=3(c+b) \Leftrightarrow c=7b$ *(2)*

Từ (1) và (2) $\Rightarrow c=-\dfrac{7}{4},\ b=-\dfrac{1}{4}$. *Vậy* $B\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{9}{4}\right),\ C\left(-\dfrac{7}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

HT 92. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* biết *A*(5; 2). Phương trình đường trung trực cạnh *BC*, đường trung tuyến *CC'* lần lượt là *x* + *y* – 6 = 0 và 2*x* – *y* + 3 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC*.

Giải

•*Gọi* $C(c;\ 2c+3)$ *và* $I(m;6-m)$ *là trung điểm của BC. Suy ra:* $B(2m-c;\ 9-2m-2c)$.

Vì C' là trung điểm của AB nên: $C'\left(\dfrac{2m-c+5}{2};\dfrac{11-2m-2c}{2}\right)\in CC'$

nên $2\left(\frac{2m-c+5}{2}\right)-\frac{11-2m-2c}{2}+3=0 \Rightarrow m=-\frac{5}{6} \Rightarrow I\left(-\frac{5}{6};\frac{41}{6}\right)$.

HT 93. *Phương trình BC:* $3x-3y+23=0 \Rightarrow C\left(\frac{14}{3};\frac{37}{3}\right) \Rightarrow B\left(-\frac{19}{3};\frac{4}{3}\right)$.Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy* , cho tam giác *ABC* có đỉnh *A*(3; –4). Phương trình đường trung trực cạnh *BC*, đường trung tuyến xuất phát từ C lần lượt là $d_1: x+y-1=0$ và $d_2: 3x-y-9=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác *ABC*.

Giải

•*Gọi* $C(c;3c-9)\in d_2$ *và M là trung điểm của BC* $\Rightarrow M(m;1-m)\in d_1$.

$\Rightarrow B(2m-c;11-2m-3c)$. *Gọi I là trung điểm của AB, ta có* $I\left(\frac{2m-c+3}{2};\frac{7-2m-3c}{2}\right)$.

Vì $I\in(d_2)$ *nên* $3.\frac{2m-c+3}{2}-\frac{7-2m-3c}{2}-9=0 \Leftrightarrow m=2 \Rightarrow M(2;-1)$

$\Rightarrow$*Phương trình BC:* $x-y-3=0$. $C=BC\cap d_2 \Rightarrow C(3;0)\Rightarrow B(1;-2)$.

HT 94. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho tam giác ABC có A(3; 5); B(4; –3), đường phân giác trong vẽ từ C là $d: x+2y-8=0$. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

•*Gọi E là điểm đối xứng của A qua d* $\Rightarrow E\in BC$. *Tìm được* $E(1;1)$

$\Rightarrow$*PT đường thẳng BC:* $4x+3y+1=0$. $C=d\cap BC \Rightarrow C(-2;5)$.

Phương trình đường tròn (ABC) có dạng: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0;\ a^2+b^2-c>0$

Ta có A, B, C ∈ (ABC) $\Rightarrow \begin{cases}4a-10b+c=-29\\ -6a-10b+c=-34\\ -8a+6b+c=-25\end{cases} \Leftrightarrow \left\{a=\frac{1}{2};b=\frac{5}{8};\ c=\frac{-99}{4}\right.$

Vậy phương trình đường tròn là: $x^2+y^2-x-\frac{5}{4}y-\frac{99}{4}=0$.

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 95. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho ΔABC biết: B(2; –1), đường cao qua A có phương trình d_1: $3x-4y+27=0$, phân giác trong góc C có phương trình d_2: $x+2y-5=0$. Tìm toạ độ điểm A.

Giải

•*Phương trình BC:* $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-4} \Rightarrow$ *Toạ độ điểm* $C(-1;3)$

+ Gọi B' là điểm đối xứng của B qua d_2, I là giao điểm của BB' và d_2.

⇒ phương trình BB': $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}\Leftrightarrow 2x-y-5=0$

+ Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x-y-5=0\\x+2y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}\Rightarrow I(3;1)$

+ Vì I là trung điểm BB' nên: $\begin{cases}x_{B'}=2x_I-x_B=4\\y_{B'}=2y_I-y_B=3\end{cases}\Rightarrow B'(4;3)$

+ Đường AC qua C và B' nên có phương trình: y –3 =0.

+ Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases}y-3=0\\3x-4y+27=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\y=3\end{cases}\Rightarrow A(-5;3)$

HT 96. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là (d_1): $x+y+2=0$, phương trình đường cao vẽ từ B là (d_2): $2x-y+1=0$, cạnh AB đi qua M(1; –1). Tìm phương trình cạnh AC.

Giải

• Gọi N là điểm đối xứng của M qua (d_1) $\Rightarrow N\in AC$. $\overrightarrow{MN}=(x_N-1,\ y_N+1)$

Ta có: $\overrightarrow{MN}\ //\ \vec{n}_{d_1}=(1;1)\Leftrightarrow 1(x_N-1)-1(y_N+1)=0\Leftrightarrow x_N-y_N=2$ (1)

Tọa độ trung điểm I của MN: $x_I=\frac{1}{2}(1-x_N),\ y_I=\frac{1}{2}(-1+y_N)$

$I\in(d_1)\Leftrightarrow\frac{1}{2}(1-x_N)+\frac{1}{2}(-1+y_N)+2=0\Leftrightarrow x_N+y_N+4=0$ (2)

Giải hệ (1) và (2) ta được N(–1; –3)

Phương trình cạnh AC vuông góc với (d_2) có dạng: x + 2y + C = 0.

$N\in(AC)\Leftrightarrow 1+2.(-3)+C=0\Leftrightarrow C=7.$ *Vậy, phương trình cạnh AC: x + 2y + 7 = 0.*

HT 97. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho tam giác ABC với A(1; –2), đường cao $CH: x-y+1=0$, phân giác trong $BN: 2x+y+5=0$. Tìm toạ độ các đỉnh B, C và tính diện tích tam giác ABC.

Giải

• Do $AB\perp CH$ *nên phương trình AB:* $x+y+1=0$.

+ B = $AB\cap BN$ *⇒ Toạ độ điểm B là nghiệm của hệ:* $\begin{cases}2x+y+5=0\\x+y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=3\end{cases}\Rightarrow B(-4;3)$.

+ Lấy A' đối xứng với A qua BN thì $A'\in BC$.

Phương trình đường thẳng (d) qua A và vuông góc với BN là (d): $x-2y-5=0$.

Gọi $I = (d) \cap BN$. *Giải hệ:* $\begin{cases} 2x + y + 5 = 0 \\ x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$. *Suy ra: I(–1; 3)* $\Rightarrow A'(-3;-4)$

+ Phương trình BC: $7x + y + 25 = 0$. *Giải hệ:* $\begin{cases} BC : 7x + y + 25 = 0 \\ CH : x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{13}{4}; -\frac{9}{4}\right)$.

+ $BC = \sqrt{\left(-4 + \frac{13}{4}\right)^2 + \left(3 + \frac{9}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{450}}{4}$, $d(A;BC) = \frac{|7.1 + 1(-2) + 25|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2}$.

Suy ra: $S_{ABC} = \frac{1}{2}d(A;BC).BC = \frac{1}{2}.3\sqrt{2}.\frac{\sqrt{450}}{4} = \frac{45}{4}$.

HT 98. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B(2;-1)$, đường cao xuất phát từ A và đường phân giác trong góc C lần lượt là $d_1 : 3x - 4y + 27 = 0$, $d_2 : x + 2y - 5 = 0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Giải

• *Đường thẳng BC qua B và vuông góc với* $d_1 \Rightarrow (BC) : 4x + 3y + 5 = 0$.

Toạ độ đỉnh C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 4x + 3y + 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-1;3)$.

Gọi B´là điểm đối xứng của B qua $d_2 \Rightarrow B'(4;3)$ *và* $B' \in (AC)$.

Đường thẳng AC đi qua C và B´$\Rightarrow (AC) : y - 3 = 0$.

Toạ độ đỉnh A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y - 3 = 0 \\ 3x - 4y + 27 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-5;3)$.

Đường thẳng AB qua A và B $\Rightarrow (AB) : 4x + 7y - 1 = 0$.

Vậy: $(AB) : 4x + 7y - 1 = 0$, $(BC) : 4x + 3y + 5 = 0$, $(AC) : y - 3 = 0$.

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 99. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho Δ ABC có đỉnh A(1;2), phương trình đường trung tuyến BM: $2x + y + 1 = 0$ và phân giác trong CD: $x + y - 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

Giải

• *Điểm* $C \in CD : x + y - 1 = 0 \Rightarrow C(t;1 - t)$. *Suy ra trung điểm M của AC là* $M\left(\frac{t+1}{2}; \frac{3-t}{2}\right)$.

Từ A(1;2), kẻ $AK \perp CD : x + y - 1 = 0$ *tại I (điểm* $K \in BC$ *).*

Suy ra $AK : (x - 1) - (y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$.

Tọa độ điểm I thỏa hệ: $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(0;1\right)$

Tam giác ACK cân tại C nên I là trung điểm của AK $\Rightarrow$ *tọa độ của* $K(-1;0)$.

Đường thẳng BC đi qua C, K nên có phương trình: $\dfrac{x+1}{-7+1}=\dfrac{y}{8} \Leftrightarrow 4x+3y+4=0$

HT 100. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho tam giác ABC có đỉnh C(4; 3). Biết phương trình đường phân giác trong (AD): $x+2y-5=0$, đường trung tuyến (AM): $4x+13y-10=0$. Tìm toạ độ đỉnh B.

Giải

• *Ta có A = AD* $\cap$ *AM* $\Rightarrow$ *A(9; –2). Gọi C′ là điểm đối xứng của C qua AD* $\Rightarrow$ *C′* $\in$ *AB.*

Ta tìm được: C′(2; –1). Suy ra phương trình (AB): $\dfrac{x-9}{2-9}=\dfrac{y+2}{-1+2} \Leftrightarrow x+7y+5=0$.

Viết phương trình đường thẳng Cx // AB $\Rightarrow$ *(Cx):* $x+7y-25=0$

HT 101. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho ΔABC, với đỉnh A(1; –3) phương trình đường phân giác trong BD: $x+y-2=0$ và phương trình đường trung tuyến CE: $x+8y-7=0$. Tìm toạ độ các đỉnh B, C.

Giải

• *Gọi E là trung điểm của AB. Giả sử* $B(b;2-b) \in BD \Rightarrow E\left(\dfrac{b+1}{2};-\dfrac{1+b}{2}\right) \in CE \Rightarrow b=-3$

$\Rightarrow B(-3;5)$. *Gọi A′ là điểm đối xứng của A qua BD* $\Rightarrow$ *A′* $\in$ *BC. Tìm được A′(5; 1)*

$\Rightarrow$ *Phương trình BC:* $x+2y-7=0$; $C=CE\cap BC: \begin{cases} x+8y-7=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases} \Rightarrow C(7;0)$.

HT 102. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ O*xy* cho tam giác *ABC* với $B(1;-2)$ đường cao $AH: x-y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh *A, C* của tam giác *ABC* biết C thuộc đường thẳng $d: 2x+y-1=0$ và diện tích tam giác *ABC* bằng 1.

Giải

• *Phương trình* $BC: x+y+1=0$. *C = BC* $\cap$ *d* $\Rightarrow C(2;-3)$.

Gọi $A(x_0;y_0) \in AH \Rightarrow x_0-y_0+3=0$ *(1);* $BC=\sqrt{2},\ AH=d(A,BC)=\dfrac{\left|x_0+y_0+1\right|}{\sqrt{2}}$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{\left|x_0+y_0+1\right|}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_0+y_0+1=2 & (2) \\ x_0+y_0+1=-2 & (3) \end{array}\right.$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow A(-1;2)$. *Từ (1) và (3)* $\Rightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-3;0)$

HT 103. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1;-3)$, trọng tâm $G(4;-2)$, trung trực của AB là $d: 3x + 2y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

• *Gọi M là trung điểm của BC* $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} \Rightarrow M\left(\frac{13}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

$AB \perp d \Rightarrow$ *AB nhận* $\vec{u}_d = (2;-3)$ *làm VTPT* $\Rightarrow$ *Phương trình* $AB: 2x - 3y - 7 = 0$.

Gọi N là trung điểm của AB $\Rightarrow N = AB \cap d \Rightarrow N(2;-1) \Rightarrow B(5;1) \Rightarrow C(8;-4)$.

PT đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC có dạng: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ *(* $a^2 + b^2 - c > 0$ *).*

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} 2a + 6b - c = 10 \\ 10a + 2b + c = -26 \\ 16a - 8b + c = -80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{74}{21} \\ b = -\frac{23}{7} \\ c = \frac{8}{3} \end{cases}$. *Vậy:* $(C): x^2 + y^2 - \frac{148}{21}x + \frac{46}{7}y + \frac{8}{3} = 0$

HT 104. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có phân giác trong AD và đường cao CH lần lượt có phương trình $x + y - 2 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$. Điểm $M(3;0)$ thuộc đoạn AC thoả mãn $AB = 2AM$. Xác định toạ độ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC.

Giải

• *Gọi E là điểm đối xứng của M qua AD* $\Rightarrow E(2;-1)$.

Đường thẳng AB qua E và vuông góc với CH $\Rightarrow (AB): 2x + y - 3 = 0$.

Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;1) \Rightarrow$ *PT* $(AM): x + 2y - 3 = 0$

Do $AB = 2AM$ *nên E là trung điểm của AB* $\Rightarrow B(3;-3)$.

Toạ độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-1;2)$

Vậy: $A(1;1)$, $B(3;-3)$, $C(-1;2)$.

<u>Câu hỏi tương tự:</u>

a) $(AD): x - y = 0$, $(CH): 2x + y + 3 = 0$, $M(0;-1)$. *ĐS:* $A(1;1)$; $B(-3;-1)$; $C\left(-\frac{1}{2};-2\right)$

HT 105. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho tam giác ABC cân tại A, đường thẳng BC có phương trình $x+2y-2=0$. Đường cao kẻ từ B có phương trình $x-y+4=0$, điểm $M(-1;0)$ thuộc đường cao kẻ từ C. Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác ABC.

Giải

• *Toạ độ đỉnh B là nghiệm của hệ:* $\begin{cases} x+2y-2=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Rightarrow B(-2;2)$.

Gọi d là đường thẳng qua M và song song với BC $\Rightarrow d: x+2y+1=0$.

Gọi N là giao điểm của d với đường cao kẻ từ B $\Rightarrow$ *Toạ độ của N là nghiệm của hệ:*

$$\begin{cases} x-y+4=0 \\ x+2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow N(-3;1).$$

Gọi I là trung điểm của MN $\Rightarrow I\left(-2;\frac{1}{2}\right)$. *Gọi E là trung điểm của BC* $\Rightarrow$ *IE là đường trung trực của BC* $\Rightarrow$ $IE: 4x-2y+9=0$.

Toạ độ điểm E là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+2y-2=0 \\ 4x-2y+9=0 \end{cases} \Rightarrow E\left(-\frac{7}{5};\frac{17}{10}\right) \Rightarrow C\left(-\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)$.

Đường thẳng CA qua C và vuông góc với BN $\Rightarrow CA: x+y-\frac{3}{5}=0$.

Toạ độ đỉnh A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 4x-2y+9=0 \\ x+y-\frac{3}{5}=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{13}{10};\frac{19}{10}\right)$.

Vậy: $A\left(-\frac{13}{10};\frac{19}{10}\right)$, $B(-2;2)$, $C\left(-\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)$.

HT 106. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy,* cho tam giác ABC có đỉnh A thuộc đường thẳng *d*: $x-4y-2=0$, cạnh BC song song với *d*, phương trình đường cao BH: $x+y+3=0$ và trung điểm của cạnh AC là M(1; 1). Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C.

Giải

• *Ta có AC vuông góc với BH và đi qua M(1; 1) nên có phương trình:* $y = x$.

Toạ độ đỉnh A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x-4y-2=0 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$

Vì M là trung điểm của AC nên $C\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$

Vì BC đi qua C và song song với d nên BC có phương trình: $y=\frac{x}{4}+2$

$BH \cap BC = B : \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ y = \dfrac{x}{4} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow B(-4;1)$

HT 107. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* có đường cao $BH : 3x + 4y + 10 = 0$, đường phân giác trong góc *A* là *AD* có phương trình là $x - y + 1 = 0$, điểm *M*(0; 2) thuộc đường thẳng *AB* đồng thời cách *C* một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC*.

Giải

• *Gọi N đối xứng với M qua* AD*. Ta có* $N \in AC$ *và* $N(1;1) \Rightarrow$ *PT cạnh* $AC : 4x - 3y - 1 = 0$

$A = AC \cap AD \Rightarrow A(4;5)$*. AB đi qua M, A* $\Rightarrow$ *PT cạnh* $AB : 3x - 4y + 8 = 0 \Rightarrow B\left(-3;-\dfrac{1}{4}\right)$

Gọi $C(a;b) \in AC \Rightarrow 4a - 3b - 1 = 0$*, ta có* $MC = \sqrt{2} \Rightarrow C(1;1)$ *hoặc* $C\left(\dfrac{31}{25};\dfrac{33}{25}\right)$.

Kiểm tra điều kiện B, C khác phía với AD, ta có cả hai điểm trên đều thỏa mãn.

HT 108. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có trung điểm cạnh AB là $M(-1;2)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là $I(2;-1)$. Đường cao của tam giác kẻ từ A có phương trình $2x + y + 1 = 0$. Tìm toạ độ đỉnh C.

Giải

• *PT đường thẳng AB qua M và nhận* $\overrightarrow{MI} = (3;-3)$ *làm VTPT:* $(AB) : x - y + 3 = 0$.

Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

$M(-1;2)$ *là trung điểm của AB nên* $B\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{7}{3}\right)$.

Đường thẳng BC qua B và nhận $\vec{n} = (2;1)$ *làm VTCP nên có PT:* $\begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} + 2t \\ y = \dfrac{7}{3} + t \end{cases}$

Giả sử $C\left(-\dfrac{2}{3} + 2t;\dfrac{7}{3} + t\right) \in (BC)$.

Ta có: $IB = IC \Leftrightarrow \left(2t - \dfrac{8}{3}\right)^2 + \left(t + \dfrac{10}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{8}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{10}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \ \ (loại \ vì \ C \equiv B) \\ t = \dfrac{4}{5} \end{array}\right.$

Vậy: $C\left(\dfrac{14}{15};\dfrac{47}{15}\right)$.

HT 109. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có đường cao AH, trung tuyến CM và phân giác trong BD. Biết $H(-4;1)$, $M\left(\frac{17}{5};12\right)$ và BD có phương trình $x+y-5=0$. Tìm tọa độ đỉnh A của tam giác ABC.

Giải

• *Đường thẳng Δ qua H và vuông góc với BD có PT:* $x-y+5=0$. $\Delta \cap BD = I \Rightarrow I(0;5)$

Giả sử $\Delta \cap AB = H'$. *ΔBHH' cân tại B ⇒ I là trung điểm của* $HH' \Rightarrow H'(4;9)$.

Phương trình AB: $5x+y-29=0$. *B = AB ∩ BD* $\Rightarrow B(6;-1) \Rightarrow A\left(\frac{4}{5};25\right)$

HT 110. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$, A(2;–3), B(3;–2). Tìm toạ độ điểm C, biết điểm C nằm trên đường thẳng (d): $3x-y-4=0$.

Giải

• *PTTS của d:* $\begin{cases} x = t \\ y = -4+3t \end{cases}$. *Giả sử C(t; –4 + 3t) ∈ d.*

$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{4t^2+4t+1} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=1 \end{array}\right.$

⇒ C(–2; –10) hoặc C(1;–1).

HT 111. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC biết A(2; –3), B(3; –2), có diện tích bằng $\frac{3}{2}$ và trọng tâm G thuộc đường thẳng $\Delta: 3x-y-8=0$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Giải

• *Ta có: AB =* $\sqrt{2}$*, trung điểm* $M\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$. *Phương trình AB:* $x-y-5=0$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.d(C,AB) = \frac{3}{2} \Rightarrow d(C,AB) = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Gọi $G(t;3t-8) \in \Delta \Rightarrow d(G,AB) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{|t-(3t-8)-5|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$

• *Với* $t=1$ *⇒ G(1; –5) ⇒ C(–2; –10)* • *Với* $t=2$ *⇒ G(2; –2) ⇒ C(1; –1)*

Câu hỏi tương tự:

a) Với $A(2;-1)$, $B(1;-2)$, $S_{ABC} = \frac{27}{2}$, $G \in \Delta: x+y-2=0$. *ĐS:* $C(18;-12)$ *hoặc* $C(-9;15)$

HT 112. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-3=0$ và hai điểm $A(-1;2)$, $B(2;1)$. Tìm toạ độ điểm C thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC bằng 2.

Giải

• $AB=\sqrt{10}$, $C(-2a+3;a)\in d$. *Phương trình đường thẳng* $AB: x+3y-5=0$.

$$S_{\Delta ABC}=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.d(C,AB)=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{10}.\frac{|a-2|}{\sqrt{10}}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=6 \\ a=-2 \end{array}\right.$$

• *Với* $a=6$ *ta có* $C(-9;6)$ • *Với* $a=-2$ *ta có* $C(7;-2)$.

Câu hỏi tương tự:

a) Với $d: x-2y-1=0$, $A(1;0)$, $B(3;-1)$, $S_{ABC}=6$. *ĐS:* $C(7;3)$ *hoặc* $C(-5;-3)$.

HT 113. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho tam giác ABC có A(2; –3), B(3; –2), diện tích tam giác bằng 1,5 và trọng tâm I nằm trên đường thẳng *d*: $3x-y-8=0$. Tìm toạ độ điểm C.

Giải

• *Vẽ* $CH\perp AB$, $IK\perp AB$. $AB=\sqrt{2} \Rightarrow CH=\frac{2S_{\Delta ABC}}{AB}=\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow IK=\frac{1}{3}CH=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Giả sử $I(a; 3a-8)\in d$. *Phương trình AB:* $x-y-5=0$.

$$d(I,AB)=IK \Leftrightarrow |3-2a|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=1 \end{array}\right. \Rightarrow I(2;-2) \text{ hoặc } I(1;-5).$$

+ Với $I(2;-2)\Rightarrow C(1;-1)$ *+ Với* $I(1;-5)\Rightarrow C(-2;-10)$.

HT 114. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho tam giác ABC có $A(1;0), B(0;2)$, diện tích tam giác bằng 2 và trung điểm I của AC nằm trên đường thẳng *d*: $y=x$. Tìm toạ độ điểm C.

Giải

• *Phương trình* $AB: 2x+y-2=0$. *Giả sử* $I(t;t)\in d \Rightarrow C(2t-1;2t)$.

Theo giả thiết: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C,AB)=2 \Leftrightarrow |6t-4|=4 \Leftrightarrow t=0;\ t=\frac{4}{3}$.

+ Với $t=0 \Rightarrow C(-1;0)$ *+ Với* $t=\frac{4}{3} \Rightarrow C\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$.

HT 115. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho tam giác ABC với $AB=\sqrt{5}$, đỉnh $C(-1;-1)$, đường thẳng AB có phương trình $x+2y-3=0$, trọng tâm của ΔABC thuộc đường thẳng $d: x+y-2=0$. Xác định toạ độ các đỉnh A, B của tam giác ABC.

Giải

• Gọi $I(a;b)$ *là trung điểm của AB, G là trọng tâm ΔABC* $\Rightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2a-1}{3} \\ y_G = \dfrac{2b-1}{3} \end{cases}$

Do $G \in d$ *nên* $\frac{2a-1}{3} + \frac{2b-1}{3} - 2 = 0$ $\Rightarrow$ *Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ:*

$$\begin{cases} a + 2b - 3 = 0 \\ \dfrac{2a-1}{3} + \dfrac{2b-1}{3} - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow I(5;-1).$$

Ta có $\begin{cases} A, B \in (AB) \\ IA = IB = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ *Toạ độ các điểm A, B là các nghiệm của hệ:* $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ (x-5)^2 + (y+1)^2 = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4;\ y = -\dfrac{1}{2} \\ x = 6;\ y = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow A\left(4;-\frac{1}{2}\right),\ B\left(6;-\frac{3}{2}\right) \text{ hoặc } A\left(6;-\frac{3}{2}\right),\ B\left(4;-\frac{1}{2}\right).$$

HT 116. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho điểm $G(2;1)$ và hai đường thẳng $d_1 : x + 2y - 7 = 0$, $d_2 : 5x + y - 8 = 0$. Tìm toạ độ điểm $B \in d_1, C \in d_2$ sao cho tam giác ABC nhận điểm G làm trọng tâm, biết A là giao điểm của d_1, d_2.

Giải

• Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ 5x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(1;3)$.

Giả sử $B(7-2b;b) \in d_1$; $C(c;8-5c) \in d_2$.

Vì G là trọng tâm của ΔABC nên: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b - c = 2 \\ b - 5c = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$.

Vậy: $B(3;2)$, $C(2;-2)$.

HT 117. Trong mặt phẳng O*xy*, cho tam giác ABC cân tại $A(-1;4)$ và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng $\Delta : x - y - 4 = 0$. Xác định toạ độ các điểm B, C, biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

Giải

• Gọi H là trung điểm của BC $\Rightarrow$ *H là hình chiếu của A trên Δ* $\Rightarrow H\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow AH = \frac{9}{\sqrt{2}}$

Theo giả thiết: $S_{\Delta ABC} = 18 \Rightarrow \frac{1}{2}BC.AH = 18 \Rightarrow BC = 4\sqrt{2} \Rightarrow HB = HC = 2\sqrt{2}$.

Toạ độ các điểm B, C là các nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y-4=0 \\ \left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{11}{2};\ y=\frac{3}{2} \\ x=\frac{3}{2};\ y=-\frac{5}{2} \end{array}\right.$

Vậy $B\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right), C\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$ *hoặc* $B\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right),\ C\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right)$.

HT 118. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ *Oxy*, cho hai đường thẳng d_1: $x+y+5=0$, d_2: $x+2y-7=0$ và tam giác *ABC* có *A*(2; 3), trọng tâm là điểm *G*(2; 0), điểm *B* thuộc d_1 và điểm *C* thuộc d_2. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

• *Do* $B \in d_1$ *nên* $B(m; -m-5)$, $C \in d_2$ *nên* $C(7-2n; n)$

Do G là trọng tâm ΔABC nên $\begin{cases} 2+m+7-2n=3.2 \\ 3-m-5+n=3.0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow B(-1; -4), C(5; 1)$

$\Rightarrow$ *PT đường tròn ngoại tiếp ΔABC:* $x^2+y^2-\frac{83}{27}x+\frac{17}{9}y-\frac{338}{27}=0$

HT 119. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC, có điểm A(2; 3), trọng tâm G(2; 0). Hai đỉnh B và C lần lượt nằm trên hai đường thẳng $d_1: x+y+5=0$ và $d_2: x+2y-7=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm C và tiếp xúc với đường thẳng BG.

Giải

• *Giả sử* $B(-5-b;b) \in d_1;\ C(7-2c;c) \in d_2$.

Vì G là trọng tâm ΔABC nên ta có hệ: $\begin{cases} x_B+x_C+2=6 \\ y_B+y_C+3=0 \end{cases} \Rightarrow B(-1;-4),\ C(5; 1)$.

Phương trình BG: $4x-3y-8=0$. *Bán kính* $R=d(C,BG)=\frac{9}{5}$

$\Rightarrow$ *Phương trình đường tròn:* $(x-5)^2+(y-1)^2=\frac{81}{25}$

HT 120. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho tam giác ABC có $A(-3;6)$, trực tâm $H(2;1)$, trọng tâm $G\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$. Xác định toạ độ các đỉnh B và C.

Giải

• *Gọi I là trung điểm của BC. Ta có* $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$

Đường thẳng BC qua I vuông góc với AH có phương trình: $x-y-3=0$

Vì I là trung điểm của BC nên giả sử $B(x_B;y_B)$ *thì* $C(7-x_B;1-y_B)$ *và* $x_B-y_B-3=0$.

H là trực tâm của tam giác ABC nên $CH\perp AB$; $\overrightarrow{CH}=(-5+x_B;y_B),\overrightarrow{AB}=(x_B+3;y_B-6)$

$$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_B-y_B=3\\(x_B-5)(x_B+3)+(y_B-6)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=1\\y_B=-2\end{cases}\vee\begin{cases}x_B=6\\y_B=3\end{cases}$$

Vậy $B(1;-2),C(6;3)$ *hoặc* $B(6;3),C(1;-2)$

HT 121. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh *A*(6; 6), đường thẳng *d* đi qua trung điểm của các cạnh *AB* và *AC* có phương trình *x + y* − 4 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh *B* và *C*, biết điểm E(1; −3) nằm trên đường cao đi qua đỉnh *C* của tam giác đã cho.

Giải

• *Gọi H là chân đường cao xuất phát từ A* ⇒ *H đối xứng với A qua d* ⇒ $H(-2;-2)$
⇒ *PT đường thẳng BC:* $x+y+4=0$. *Giả sử* $B(m;-4-m)\in BC$ ⇒ $C(-4-m;m)$
⇒ $\overrightarrow{CE}=(5+m;-3-m),\ \overrightarrow{AB}=(m-6;-10-m)$.
Vì $CE\perp AB$ *nên* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE}=0\Leftrightarrow(m-6)(m+5)+(m+3)(m+10)=0\Leftrightarrow m=0;\ m=-6$.
Vậy: $B(0;-4),\ C(-4;0)$ *hoặc* $B(-6;2),\ C(2;-6)$.

HT 122. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;4)$. Đường thẳng Δ qua trung điểm của cạnh AB và AC có phương trình $4x-6y+9=0$; trung điểm của cạnh BC nằm trên đường thẳng d có phương trình: $2x-2y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C, biết rằng tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{7}{2}$ và đỉnh C có hoành độ lớn hơn 1.

Giải

• *Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Δ, ta tính được* $A'\left(\frac{40}{13};\frac{31}{13}\right)\Rightarrow BC:2x-3y+1=0$

Ta gọi M là trung điểm của BC, thì M là giao của đường thẳng d *và BC nên* $M\left(\frac{5}{2};2\right)$.

Giả sử $C\left(\frac{3t-1}{2};t\right)\in(BC)$. *Ta có* $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}d(A;BC).BC\Leftrightarrow\frac{7}{2}=\frac{1}{2}\frac{7}{\sqrt{13}}.BC\Leftrightarrow BC=\sqrt{13}\Leftrightarrow CM=\frac{\sqrt{13}}{2}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\left(\frac{3t-6}{2}\right)^2+(t-2)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}C(4;3)\\C(1;1)\ (loại)\end{array}\right.\Rightarrow B(1;1).$$

Vậy: $B(1;1),\ C(4;3)$.

HT 123. Trong mặt phẳng toạ độ với hệ toạ độ Oxy, cho ΔABC với $AB=\sqrt{5}$, đỉnh $C(-1;-1)$, phương trình cạnh $AB:x+2y-3=0$ và trọng tâm G của ΔABC thuộc đường thẳng $d:x+y-2=0$. Xác định tọa độ các đỉnh A,B của tam giác.

Giải

• *Gọi* $I(x;y)$ *là trung điểm* AB, $G(x_G;y_G)$ *là trọng tâm của ΔABC*

$$\Rightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2x-1}{3} \\ y_G = \dfrac{2y-1}{3} \end{cases}$$

$G \in d: x + y - 2 = 0$ nên có: $x_G + y_G - 2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{2y-1}{3} - 2 = 0$

Tọa độ điểm I thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ \dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{2y-1}{3} - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(5;-1)$

Gọi $A(x_A; y_A) \Rightarrow IA^2 = (x_A - 5)^2 + (y_A + 1)^2 = \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$.

Hơn nữa $A \in AB: x + 2y - 3 = 0$ suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x_A + 2y_A - 3 = 0 \\ (x_A - 5)^2 + (y_A + 1)^2 = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 4 \\ y_A = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_A = 6 \\ y_A = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy: $A\left(4;-\dfrac{1}{2}\right), B\left(6;-\dfrac{3}{2}\right)$ *hoặc* $B\left(4;-\dfrac{1}{2}\right), A\left(6;-\dfrac{3}{2}\right)$.

HT 124. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, tìm toạ độ các đỉnh của một tam giác vuông cân, biết đỉnh $C(3;-1)$ và phương trình của cạnh huyền là $d: 3x - y + 2 = 0$.

Giải

• Toạ độ điểm C không thoả mãn phương trình cạnh huyền nên ΔABC vuông cân tại C. Gọi I là trung điểm của AB. Phương trình đường thẳng CI: $x + 3y = 0$.

$I = CI \cap AB \Rightarrow I\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right) \Rightarrow AI = BI = CI = \sqrt{\dfrac{72}{5}}$

Ta có: $\begin{cases} A, B \in d \\ AI = BI = \sqrt{\dfrac{72}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ \left(x + \dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{72}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{5};\ y = \dfrac{19}{5} \\ x = -\dfrac{9}{5};\ y = -\dfrac{17}{5} \end{array}\right.$

Vậy toạ độ 2 đỉnh cần tìm là: $\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{19}{5}\right), \left(-\dfrac{9}{5};-\dfrac{17}{5}\right)$.

HT 125. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho điểm C(2; –5) và đường thẳng Δ có phương trình: $3x - 4y + 4 = 0$. Tìm trên Δ hai điểm A và B đối xứng nhau qua $I\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 15.

Giải

•*Gọi* $A\left(a;\frac{3a+4}{4}\right)\in\Delta\Rightarrow B\left(4-a;\frac{16-3a}{4}\right)\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C,\Delta)=3AB\Rightarrow AB=5.$

$AB=5\Leftrightarrow(4-2a)^2+\left(\frac{6-3a}{2}\right)^2=25\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=4\\a=0\end{array}\right.$. *Vậy hai điểm cần tìm là A(0; 1) và B(4; 4).*

HT 126. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ O*xy* cho tam giác *ABC* vuông tại $A(2;1)$, điểm B nằm trên trục hoành, điểm C nằm trên trục tung sao cho các điểm B, C có toạ độ không âm. Tìm toạ độ các điểm B, C sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Giải

•*Giả sử* $B(b;0)$, $C(0;c)$, $(b,c\geq 0)$.

ΔABC vuông tại A $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow c=-2b+5\geq 0\Leftrightarrow 0\leq b\leq\frac{5}{2}$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}\sqrt{(b-2)^2+1}.\sqrt{2^2+(c-1)^2}=(b-2)^2+1=b^2-4b+5$

Do $0\leq b\leq\frac{5}{2}$ *nên* $S_{\Delta ABC}$ *đạt GTLN* $\Leftrightarrow b=0\Rightarrow B(0;0),C(0;5)$.

HT 127. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho tam giác ABC có trực tâm $H(-1;6)$, các điểm $M(2;2)\,N(1;1)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C.

Giải

•*Đường thẳng CH qua H và vuông góc với MN* $\Rightarrow CH: x+y+5=0$.

Giả sử $C(a;5-a)\in CH\Rightarrow\overrightarrow{CN}=(1-a;a-4)$

Vì M là trung điểm của AC nên $A(4-a;a-1)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(a-5;7-a)$

Vì N là trung điểm của BC nên $B(2-a;a-3)$

Vì H là trực tâm ΔABC nên: $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CN}=0\Leftrightarrow(a-5)(1-a)+(7-a)(a-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\\a=\frac{11}{2}\end{array}\right.$.

+ Với $a=3\Rightarrow C(3;2),A(1;2),B(-1;0)$

+ Với $a=\frac{11}{2}\Rightarrow C\left(\frac{11}{2};-\frac{1}{2}\right),A\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right),B\left(-\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$

HT 128. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho tam giác ABC có điểm M(–1; 1) là trung điểm của cạnh BC, hai cạnh AB, AC lần lượt nằm trên hai đường thẳng d_1: $x+y-2=0$ và d_2: $2x+6y+3=0$. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C.

Giải

• *Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ:* $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+6y+3=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{15}{4};-\frac{7}{4}\right)$.

Giả sử: $B(b;2-b)\in d_1$, $C\left(c;\frac{-3-2c}{6}\right)\in d_2$. *M(−1; 1) là trung điểm của BC*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b+c}{2}=-1 \\ \frac{2-b+\frac{-3-2c}{6}}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{4} \\ c=-\frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right),\ C\left(-\frac{9}{4};\frac{1}{4}\right).$$

HT 129. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC cân có đáy là BC. Đỉnh A có tọa độ là các số dương, hai điểm B và C nằm trên trục Ox, phương trình cạnh $AB: y=3\sqrt{7}(x-1)$. Biết chu vi của ΔABC bằng 18, tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Giải

• $B=AB\cap Ox\Rightarrow B(1;0)$, $A\in AB\Rightarrow A\left(a;3\sqrt{7}(a-1)\right)\Rightarrow a>1$ (do $x_A>0, y_A>0$).

Gọi AH là đường cao $\Delta ABC\Rightarrow H(a;0)\Rightarrow C(2a-1;0)\Rightarrow BC=2(a-1), AB=AC=8(a-1)$.

Chu vi $\Delta ABC=18\Leftrightarrow a=2\Rightarrow C(3;0), A\left(2;3\sqrt{7}\right)$.

HT 130. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh AB, BC lần lượt là $4x+3y-4=0$; $x-y-1=0$. Phân giác trong của góc A nằm trên đường thẳng $x+2y-6=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Giải

• *Tọa độ của A nghiệm đúng hệ phương trình:* $\begin{cases} 4x+3y-4=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow A(-2;4)$

Tọa độ của B nghiệm đúng hệ phương trình $\begin{cases} 4x+3y-4=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(1;0\right)$

Phương trình AC qua điểm A(−2;4) có dạng: $a(x+2)+b(y-4)=0\Leftrightarrow ax+by+2a-4b=0$

Gọi $\Delta_1: 4x+3y-4=0;\ \Delta_2: x+2y-6=0;\ \Delta_3: ax+by+2a-4b=0$

Từ giả thiết suy ra $\widehat{(\Delta_2;\Delta_3)}=\widehat{(\Delta_1;\Delta_2)}$.

Do đó $\cos\widehat{(\Delta_2;\Delta_3)}=\cos\widehat{(\Delta_1;\Delta_2)}\Leftrightarrow \frac{|1.a+2.b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|4.1+2.3|}{\sqrt{25}.\sqrt{5}}$

$$\Leftrightarrow |a+2b|=2\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow a(3a-4b)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ 3a-4b=0 \end{array}\right.$$

• *a = 0* $\Rightarrow b \neq 0$. *Do đó* $\Delta_3 : y - 4 = 0$

• *3a – 4b = 0: Chọn a = 4 thì b = 3. Suy ra* $\Delta_3 : 4x + 3y - 4 = 0$ *(trùng với* Δ_1*).*

Do vậy, phương trình của đường thẳng AC là y – 4 = 0.

Tọa độ của C nghiệm đúng hệ phương trình: $\begin{cases} y - 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(5;4)$

HT 131. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, biết toạ độ trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* lần lượt là *H*(2;2), *I*(1;2) và trung điểm $M\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$ của cạnh *BC*. Hãy tìm toạ độ các đỉnh $A,\ B,\ C$ biết $x_B > x_C$ (x_B, x_C lần lượt hoành độ điểm *B* và *C*).

Giải

• *Gọi G là trọng tâm ΔABC ta có :* $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GI} \Rightarrow G\left(\frac{4}{3};2\right)$

Mặt khác vì $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$ *nên* $A(-1;1)$. *Phương trình BC:* $3x + y - 10 = 0$. *Đường tròn (C) ngoại tiếp Δ có tâm I(1; 2) và bán kính* $R = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$. *Do đó (C) :* $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

Khi đó toạ độ B ;C là nghiệm hệ : $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \\ 3x + y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

Vì $x_B > x_C$ *nên B(3;1) ; C(2;4). Vậy : A(–1; 1); B(3; 1) ; C(2; 4).*

HT 132. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ O*xy*, cho tam giác ABC cân tại C có diện tích bằng 10, phương trình cạnh AB là $x - 2y = 0$, điểm I(4; 2) là trung điểm của AB, điểm $M\left(4;\frac{9}{2}\right)$ thuộc cạnh BC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết tung độ điểm B lớn hơn hoặc bằng 3.

Giải

• *Giả sử* $B(2y_B;y_B) \in AB \Rightarrow A(8 - 2y_B;4 - y_B)$. *Phương trình CI:* $2x + y - 10 = 0$.

Gọi $C(x_C;10 - 2x_C) \Rightarrow \left|\overrightarrow{CI}\right| = \sqrt{5}\left|4 - x_C\right|$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{20}\left|y_B - 2\right|$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}CI.AB = 10 \Leftrightarrow \left|4y_B + 2x_C - x_Cy_B - 8\right| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_Cy_B - 4y_B - 2x_C = -6 & (1) \\ x_Cy_B - 4y_B - 2x_C = -10 & (2) \end{array}\right.$

Vì $M \in BC \Rightarrow \overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x_C = k\left(2y_B - 4\right) \\ -\frac{11}{2} + 2x_C = k\left(y_B - \frac{9}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow 2x_Cy_B - 6y_B - 5x_C + 16 = 0$ *(3)*

• *Từ (1) và (3):* $\begin{cases} x_Cy_B - 4y_B - 2x_C = -6 \\ 2x_Cy_B - 6y_B - 5x_C + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_B = -1 - \sqrt{2} \\ y_B = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$ *(loại, vì* $y_B \geq 3$*)*

• *Từ (2) và (3):* $\begin{cases} x_C y_B - 4y_B - 2x_C = -10 \\ 2x_C y_B - 6y_B - 5x_C + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_B = 3 \\ x_C = 2 \end{cases}$ *(thoả)*

Vậy A(2; 1), B(6; 3), C(2; 6).

HT 133. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho tam giác ABC vuông tại A, các đỉnh A, B thuộc đường thẳng *d: y* = 2, phương trình cạnh BC: $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng $\sqrt{3}$.

Giải

• $B = d \cap BC$ *⇒B(0; 2). Giả sử* $A(a;2) \in d, (a \neq 2)$, $C(c;2 + c\sqrt{3}) \in BC, (c \neq 0)$.

$\overrightarrow{AB} = (-a;0), \overrightarrow{AC} = (c - a;c\sqrt{3}), \overrightarrow{BC} = (c;c\sqrt{3}) \Rightarrow AB = |a|, AC = \sqrt{(c-a)^2 + 3c^2}, BC = 2|c|$

ΔABC vuông ở A và $r = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ S = pr \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \frac{1}{2}AB.AC = \frac{AB + BC + AC}{2}.\sqrt{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a(c - a) = 0 \\ |a|\sqrt{(c-a)^2 + 3c^2} = \left(|a| + 2|c| + \sqrt{(c-a)^2 + 3c^2}\right)\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \neq 0 \\ |a| = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} c = a = 3 + \sqrt{3} & \Rightarrow A(3 + \sqrt{3};2), C(3 + \sqrt{3};5 + 3\sqrt{3}) \\ c = a = -3 - \sqrt{3} & \Rightarrow A(-3 - \sqrt{3};2), C(-3 - \sqrt{3};-1 - 3\sqrt{3}) \end{array}\right.$$

HT 134. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, tìm toạ độ các đỉnh của tam giác vuông cân ABC, có phương trình hai cạnh $AB: x - 2y + 1 = 0$, $AC: 2x + y - 3 = 0$ và cạnh BC chứa điểm $I\left(\frac{8}{3};1\right)$.

Giải

• *Ta có: AB ⊥ AC ⇒ ΔABC vuông cân tại A* $\Rightarrow A(1;1)$.

Gọi M(x ; y) thuộc tia phân giác At của góc $\widehat{BAC}$. *Khi đó M cách đều hai đường thẳng AB, AC. Hơn nữa M và I cùng phía đối với đường thẳng AB và cùng phía đối với đường thẳng AC, tức là:*

$$\begin{cases} \frac{|x - 2y + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x + y - 3|}{\sqrt{5}} \\ (x - 2y + 1)\left(\frac{8}{3} - 2 + 1\right) > 0 \\ (2x + y - 3)\left(\frac{16}{3} + 1 - 3\right) > 0 \end{cases} \Rightarrow x + 3y - 4 = 0$$

$At \perp BC \Rightarrow \vec{n}_{BC} = (3;-1) \Rightarrow BC: 3x - y - 7 = 0$; $B = AB \cap BC: \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 3x - y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(3;2)$;

$C = AC \cap BC : \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 3x - y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2;-1)$.

HT 135. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho tam giác ABC vuông cân tại A, biết các đỉnh A, B, C lần lượt nằm trên các đường thẳng *d*: $x + y - 5 = 0$, d_1: $x + 1 = 0$, d_2: $y + 2 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C, biết BC = $5\sqrt{2}$.

Giải

• *Chú ý: $d_1 \perp d_2$ và ΔABC vuông cân tại A nên A cách đều d_1, d_2 $\Rightarrow$ A là giao điểm của d và đường phân giác của góc tạo bởi d_1, d_2 $\Rightarrow$ A(3; 2).*

Giả sử B(–1; b) ∈ d_1, C(c; –2) ∈ d_2. $\overrightarrow{AB} = (-4; b-2)$, $\overrightarrow{AC} = (c-3; -4)$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ BC^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 5,\ c = 0 \\ b = -1,\ c = 6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(3;2),\ B(-1;5),\ C(0;-2) \\ A(3;2),\ B(-1;-1),\ C(6;-2) \end{array}\right.$.

HT 136. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* cân tại đỉnh C biết phương trình đường thẳng AB là: $x + y - 2 = 0$, trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{14}{3}; \frac{5}{3}\right)$ và diện tích của tam giác ABC bằng $\frac{65}{2}$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

• *Gọi H là trung điểm của AB* $\Rightarrow CH \perp AB \Rightarrow$ *CH:* $x - y - 3 = 0 \Rightarrow H\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow C(9;6)$.

Gọi $A(a; 2-a) \in AB \Rightarrow B(5-a; a-3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (5-2a; 2a-5)$; $\overrightarrow{CH} = \left(-\frac{13}{2}; -\frac{13}{2}\right)$

$S_{\Delta ABC} = \frac{65}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.CH = \frac{65}{2} \Leftrightarrow 8a^2 - 40a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 5 \end{array}\right.$

• *Với* $a = 0 \Rightarrow A(0;2); B(5;-3)$ • *Với* $a = 5 \Rightarrow A(5;-3),\ B(0;2)$

PT đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC có dạng: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 - c > 0)$

(C) qua A, B, C nên $\begin{cases} 4b + c = -4 \\ 10a - 6b + c = -34 \\ 18a + 12b + c = -117 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-137}{26} \\ b = \frac{-59}{26} \\ c = \frac{66}{13} \end{cases}$

$\Rightarrow (C): x^2 + y^2 - \frac{137}{13}x - \frac{59}{13}y + \frac{66}{13} = 0$

HT 137. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho Δ *ABC* có phương trình cạnh *AB:* $x + y - 3 = 0$, phương trình cạnh *AC:* $3x + y - 7 = 0$ và trọng tâm $G\left(2; \frac{1}{3}\right)$. Viết phương trình đường tròn đi qua trực tâm *H* và hai đỉnh *B, C* của

tam giác ABC.

Giải

• $A = AB \cap AC \Rightarrow A(2;1)$. *Giả sử* $B(m;3-m)$, $C(n;7-3n)$.

$G\left(2;\frac{1}{3}\right)$ *là trọng tâm ΔABC nên:* $\begin{cases} 2+m+n=6 \\ 1+3-m+7-3n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=3 \end{cases} \Rightarrow$ *B(1; 2), C(3; –2)*

H là trực tâm ΔABC $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow H(10;5)$.

PT đường tròn (S) qua B, C, H có dạng: $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ $(a^2+b^2-c>0)$

Do B, C, H ∈ (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+4b+c=-5 \\ 6a-4b+c=-13 \\ 20a+10b+c=-125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=-2 \\ c=15 \end{cases}$. *Vậy (S):* $x^2+y^2-12x-4y+15=0$.

HT 138. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho điểm A(0; 2) và đường thẳng d: $x-2y+2=0$. Tìm trên d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B và AB = 2BC.

Giải

Ta có, tam giác ABC vuông tại B nên $AB \perp BC$ hay $AB \perp d$

Suy ra, $AB: 2x+y+c_1=0$; AB qua $A(0;2)$ nên $c_1=-2 \Rightarrow AB: 2x+y-2=0$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=\frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{2}{5};\frac{6}{5}\right)$

$AB=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, Tọa độ $C(2c-2;c) \Rightarrow BC=\sqrt{\left(2c-\frac{12}{5}\right)^2+\left(c-\frac{6}{5}\right)^2}$

Theo đề bài: $AB=2BC \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{\left(2c-\frac{12}{5}\right)^2+\left(c-\frac{6}{5}\right)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5}=5c^2-12c+\frac{36}{5} \Leftrightarrow 5c^2-12c+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=\frac{7}{5} \end{array}\right.$

Với, $c=1 \Rightarrow C_1(0;1)$

Với, $c=\frac{7}{5} \Rightarrow C_2\left(\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)$

Kết luận: $B\left(\frac{2}{5};\frac{6}{5}\right)$; $C_1(0;1)$; $C_2\left(\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)$

HT 139. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân ngoại tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2=2$. Tìm toạ độ 3 đỉnh của tam giác, biết điểm A thuộc tia Ox.

Giải

A là giao của tia Ox với (C) $\Rightarrow A(2;0)$.

Hai tiếp tuyến kẻ từ A đến (C) là: $x+y-2=0$ *và* $x-y-2=0$.

Vì ΔABC vuông cân nên cạnh BC tiếp xúc với (C) tại trung điểm M của BC

$\Rightarrow$ *M là giao của tia đối tia Ox với (C)* $\Rightarrow M\left(-\sqrt{2};0\right)$.

Phương trình cạnh BC: $x=-\sqrt{2}$. *B và C là các giao điểm của BC với 2 tiếp tuyến trên*

$\Rightarrow$ *Toạ độ 2 điểm B, C là:* $\left(-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2};-2-\sqrt{2}\right)$.

HT 140. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có trung điểm của cạnh BC là điểm $M(3;-1)$, đường thẳng chứa đường cao kẻ từ đỉnh B đi qua điểm $E(-1;-3)$ và đường thẳng chứa cạnh AC đi qua điểm $F(1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết rằng điểm đối xứng của đỉnh A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là điểm $D(4;-2)$.

Giải

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, ta chứng minh được BDCH là hình bình hành nên M là trung điểm của HD suy ra $H(2;0)$. *Đường thẳng BH có VTCP là* $\overrightarrow{EH}=(3;3)$ $\Rightarrow$ *VTPT là* $\vec{n}_{BH}=(1;-1)\Rightarrow BH: x-y-2=0$

+ AC vuông góc với BH nên $\vec{n}_{AC}=\vec{u}_{BH}=(1;1)\Rightarrow AC: x+y-4=0$

+ AC vuông góc với CD nên $\vec{n}_{DC}=\vec{u}_{AC}=(1;-1)\Rightarrow DC: x-y-6=0$.

+ C là giao của AC và DC nên tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+y-4=0\\x-y-6=0\end{cases}\Rightarrow C(5;-1)$

+ M là trung điểm của BC nên $B(1;-1)$. *AH vuông góc với BC* $\Rightarrow AH: x-2=0$

+ A là giao điểm của HA và AC nên tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-2=0\\x+y-4=0\end{cases}\Rightarrow A(2;2)$.

Vậy: $A(2;2)$, $B(1;-1)$, $C(5;-1)$.

HT 141. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho tam giác ABC vuông tại A, biết B và C đối xứng nhau qua gốc tọa độ. Đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$ là $d: x+2y-5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác biết đường thẳng AC đi qua điểm $K(6;2)$

Giải

Giả sử $B(5-2b;b), C(2b-5;-b) \in d$ *,* $O(0;0) \in BC$

Gọi I đối xứng với O qua phân giác trong góc $\widehat{ABC}$ *nên* $I(2;4)$ *và* $I \in AB$

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{BI} = (2b-3;4-b)$ *vuông góc với* $\overrightarrow{CK} = (11-2b;2+b)$

$\Leftrightarrow (2b-3)(11-2b)+(4-b)(2+b)=0 \Leftrightarrow -5b^2+30b-25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=5 \end{array}\right.$

+ Với $b=1 \Rightarrow B(3;1), C(-3;-1) \Rightarrow A(3;1) \equiv B$ *(loại)*

+ Với $b=5 \Rightarrow B(-5;5), C(5;-5) \Rightarrow A\left(\frac{31}{5};\frac{17}{5}\right)$

Vậy $A\left(\frac{31}{5};\frac{17}{5}\right); B(-5;5); C(5;-5)$

HT 142. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho tam giác ABC có đỉnh $A\left(\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)$ và phương trình hai đường phân giác trong BB′: $x-2y-1=0$ và CC′: $x+3y-1=0$. Chứng minh tam giác ABC vuông.

Giải

Gọi A_1, A_2 lần lượt là điểm đối xứng của A qua BB′, CC′ ⇒ A_1, A_2 ∈ BC.

Tìm được: $A_1(0; -1)$, $A_2(2; -1)$ ⇒ Phương trình BC: $y=-1$ *⇒ B(–1; –1), C(4; –1)*

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \widehat{A}$ *vuông.*

HT 143. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho phương trình hai cạnh của một tam giác là $5x-2y+6=0$ và $4x+7y-21=0$. Viết phương trình cạnh thứ ba của tam giác đó, biết rằng trực tâm của nó trùng với gốc toạ độ.

Giải

Giả sử: $(AB): 5x-2y+6=0$, $(AC): 4x+7y-21=0 \Rightarrow A(0;3)$.

Đường cao BO đi qua B và vuông góc với AC $\Rightarrow (BO): 7x-4y=0 \Rightarrow B(-4;-7)$.

Cạnh BC đi qua B và vuông góc với OA $\Rightarrow (BC): y+7=0$.

HT 144. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B(-12;1)$, đường phân giác trong góc A có phương trình $d: x+2y-5=0$. $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Viết phương trình đường thẳng BC.

Giải

Gọi M là điểm đối xứng của B qua d $\Rightarrow M(-6;13) \in (AC)$.

Giả sử $A(5-2a;a)\in d \Rightarrow C(8+2a;1-a)$.

Do $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}$ *cùng phương* $\Rightarrow a=-2 \Rightarrow C(4;3)$

Vậy: $(BC): x-8y+20=0$.

HT 145. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC cân, cạnh đáy BC có phương trình d_1: $x+y+1=0$. Phương trình đường cao vẽ từ B là d_2: $x-2y-2=0$. Điểm M(2; 1) thuộc đường cao vẽ từ C. Viết phương trình các cạnh bên của tam giác ABC.

Giải

B(0; –1). $\overrightarrow{BM}=(2;2) \Rightarrow MB\perp BC$. *Kẻ MN // BC cắt d_2 tại N thì BCNM là hình chữ nhật.*

PT đường thẳng MN: $x+y-3=0$. *N = MN* $\cap d_2 \Rightarrow N\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3}\right)$.

$NC\perp BC \Rightarrow$ *PT đường thẳng NC:* $x-y-\frac{7}{3}=0$. *C = NC* $\cap d_1 \Rightarrow C\left(\frac{2}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

$AB\perp CM \Rightarrow$ *PT đường thẳng AB:* $x+2y+2=0$.

$AC\perp BN \Rightarrow$ *PT đường thẳng AC:* $6x+3y+1=0$

HT 146. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác có phương trình hai cạnh là $AB: 5x-2y+6=0$ và $AC: 4x+7y-21=0$. Viết phương trình cạnh BC, biết rằng trực tâm của nó trùng với gốc tọa độ O.

Giải

AB: 5x – 2y + 6 = 0; AC: 4x + 7y – 21 = 0 $\Rightarrow$ *A(0;3)*

Phương trình đường cao BO: 7x – 4y = 0 $\Rightarrow$ *B(–4; –7)*

A nằm trên Oy, vậy đường cao AO nằm trên trục Oy $\Rightarrow$ *BC: y + 7 = 0.*

HT 147. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình cạnh AB: $x-y-2=0$, phương trình cạnh AC: $x+2y-5=0$. Biết trọng tâm của tam giác G(3; 2). Viết phương trình cạnh BC.

Giải

$A=AB\cap AC \Rightarrow$ *A(3; 1). Gọi* $B(b;b-2)\in AB, C(5-2c;c)\in AC$.

Do G là trọng tâm của ΔABC nên $\begin{cases}3+b+5-2c=9\\1+b-2+c=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=5\\c=2\end{cases} \Rightarrow$ *B(5; 3), C(1; 2)*

$\Rightarrow$ *Phương trình cạnh BC:* $x-4y+7=0$.

HT 148. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho tam giác ABC có A(2; 7) và đường thẳng AB cắt trục *Oy* tại E sao cho

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$. Biết rằng tam giác AEC cân tại A và có trọng tâm là $G\left(2;\frac{13}{3}\right)$. Viết phương trình cạnh BC.

Giải

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ *⇒ M(2; 3).*

Đường thẳng EC qua M và có VTPT $\overrightarrow{AG} = \left(0;-\frac{8}{3}\right)$ *nên có PT:*

$y = 3$ *⇒ E(0; 3) ⇒ C(4; 3). Mà* $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$ *nên B(–1; 1).*

⇒ Phương trình BC: $2x - 5y + 7 = 0$.

HT 149. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC cân tại A, phương trình các cạnh AB, BC lần lượt là $x + 2y - 1 = 0$ và $3x - y + 5 = 0$. Viết phương trình cạnh AC biết AC đi qua điểm M(1;–3).

Giải

Đường thẳng AC có VTPT: $\vec{n}_1 = (1;2)$. *Đường thẳng BC có VTPT* $\vec{n}_2 = (3;-1)$.

Đường thẳng AC qua M(1; –3) nên PT có dạng: $a(x-1) + b(y+3) = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$

ΔABC cân tại đỉnh A nên ta có: $\cos(AB, BC) = \cos(AC, BC)$

$$\Leftrightarrow \frac{3-2}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{3^2+1^2}} \Leftrightarrow 22a^2 - 15ab + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}b \ \vee \ a = \frac{2}{11}b$$

• *Với* $a = \frac{1}{2}b$, *chọn a = 1, b = 2 ta được AC:* $x + 2y + 5 = 0$ *(loại vì khi đó AC//AB)*

• *Với* $a = \frac{2}{11}b$, *chọn a = 2, b = 11 ta được AC:* $2x + 11y + 31 = 0$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) $AB: 12x - y - 23 = 0,\ BC: 2x - 5y + 1 = 0,\ M(3;1)$ *ĐS:* $AC: 8x + 9y - 33 = 0$.

b) $AB: 2x - y + 6 = 0,\ BC: x - 3y - 2 = 0,\ M(3;2)$. *ĐS:* $AC: x + 2y - 7 = 0$.

HT 150. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ O*xy*, cho tam giác ABC có điểm A(2; 3), đường phân giác trong góc A có phương trình $x - y + 1 = 0$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là I(6; 6) và diện tích tam giác ABC gấp 3 lần diện tích tam giác IBC. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.

Giải

Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. (C) có tâm $I(6;6)$ *và bán kính* $R = IA = 5$

⇒ (C): $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 25$

Gọi D là giao điểm của (C) với đường thẳng $x - y + 1 = 0 \Rightarrow D(9;10)$

Ta có: $ID \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{ID} = (3;4)$ *là VTPT của BC ⇒ Phương trình BC có dạng :* $3x + 4y + m = 0$

Theo đề bài ta có $S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta IBC} \Leftrightarrow d(A, BC) = 3d(I, BC) \Leftrightarrow |18 + m| = 3|42 + m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -54 \\ m = -36 \end{array}\right.$

Vậy có hai đường thẳng thỏa YCBT : $3x + 4y - 54 = 0$ *và* $3x + 4y - 36 = 0$

HT 151. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(-1;4)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(-3;0)$ và trung điểm của cạnh BC là $M(0;-3)$. Viết phương trình đường thẳng AB, biết điểm B có hoành độ dương.

Giải

Giả sử N là trung điểm của AC. Vì ΔABH ~ ΔMNI và HA // MI nên $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow A(-7;10)$

Ta có: $IA = IB,\ IM \perp MB$ *⇒ Toạ độ điểm B thoả hệ:* $\begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = 116 \\ -3x + 3(y+3) = 0 \end{cases} \Rightarrow B(7;4)$.

Vậy: Phương trình $AB: 3x + 7y - 49 = 0$.

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 152. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có A(3; 3), B(2; –1), C(11; 2). Viết phương trình đường thẳng đi qua A và chia ΔABC thành hai phần có tỉ số diện tích bằng 2.

Giải

Gọi d là đường thẳng cần viết. Gọi $M = d \cap BC$

Khi đó tam giác ABC được chia thành hai tam giác ABM và ACM.

Ta có: $S_{ABM} = \frac{1}{2}d(A, BC).BM; S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2}d(A, BC).CM$

Theo đề bài: $\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta ACM}} = 2 \Leftrightarrow \frac{BM}{CM} = 2$ hoặc $\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta ACM}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{BM}{CM} = \frac{1}{2}$

Trường hợp 1: $\frac{BM}{CM} = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC}$

Đặt $M(a;b); \overrightarrow{BM} = (a-2; b+1), \overrightarrow{MC} = (11-a; 2-b)$

Suy ra: $\begin{cases} a - 2 = 22 - 2a \\ b + 1 = 4 - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow M(8;1) \Rightarrow AM: 2x + 5y - 21 = 0$

Tương tự với trường hợp: $\frac{BM}{CM} = \frac{1}{2}$ ta được: AM: $3x + 2y - 15 = 0$

Kết luận: $3x + 2y - 15 = 0;\ 2x + 5y - 21 = 0$.

HT 153. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho 2 đường thẳng $d_1: 2x + 5y + 3 = 0$; $d_2: 5x - 2y - 7 = 0$ cắt nhau tại A và điểm $P(-7;8)$. Viết phương trình đường thẳng d_3 đi qua P tạo với d_1, d_2 thành tam giác cân tại A và có diện tích bằng $\frac{29}{2}$.

Giải

Ta có $A(1;-1)$ *và* $d_1 \perp d_2$. *PT các đường phân giác của các góc tạo bởi* d_1, d_2 *là:*

Δ_1: $7x + 3y - 4 = 0$ *và* Δ_2: $3x - 7y - 10 = 0$

d_3 *tạo với* d_1, d_2 *một tam giác vuông cân* $\Rightarrow d_3$ *vuông góc với* Δ_1 *hoặc* Δ_2.

$\Rightarrow$ *Phương trình của* d_3 *có dạng:* $7x + 3y + C = 0$ *hay* $3x - 7y + C' = 0$

Mặt khác, d_3 *qua* $P(-7;8)$ *nên C = 25 ; C´= 77.*

Suy ra : $d_3: 7x + 3y + 25 = 0$ *hay* $d_3: 3x - 7y + 77 = 0$

Theo giả thiết tam giác vuông cân có diện tích bằng $\frac{29}{2} \Rightarrow$ *cạnh huyền bằng* $\sqrt{58}$

Suy ra độ dài đường cao A H = $\frac{\sqrt{58}}{2} = d(A, d_3)$

• *Với* $d_3: 7x + 3y + 25 = 0$ *thì* $d(A;d_3) = \frac{\sqrt{58}}{2}$ *(thích hợp)*

• *Với* $d_3: 3x - 7y + 77 = 0$ *thì* $d(A;d_3) = \frac{87}{\sqrt{58}}$ *(loại)*

HT 154. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho 4 điểm A(1;0), B(–2;4), C(–1;4), D(3;5). Tìm toạ độ điểm M thuộc đường thẳng $(\Delta): 3x - y - 5 = 0$ sao cho hai tam giác MAB, MCD có diện tích bằng nhau.

Giải

Phương trình tham số của Δ: $\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 5 \end{cases}$. *M ∈ Δ ⇒ M(t; 3t – 5)*

$$S_{MAB} = S_{MCD} \Leftrightarrow d(M, AB).AB = d(M, CD).CD \Leftrightarrow t = -9 \vee t = \frac{7}{3} \Rightarrow M(-9;-32),\ M\left(\frac{7}{3};2\right)$$

HT 155. Trong mặt phẳng tọa độ O*xy*, cho tam giác ABC cân tại A có phương trình 2 cạnh AB, AC lần lượt là $x + 2y - 2 = 0$ và $2x + y + 1 = 0$, điểm $M(1;2)$ thuộc đoạn BC. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

Giải

Phương trình BC có dạng: $a(x-1) + b(y-2) = 0, a^2 + b^2 > 0$.

ΔABC cân tại A nên $\cos B = \cos C \Leftrightarrow \dfrac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}} = \dfrac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=b \end{array}\right.$

• *Với* $a=-b$ *: chọn* $b=-1, a=1 \Rightarrow$ BC: $x-y+1=0 \Rightarrow B(0;1),\ C\left(\dfrac{-2}{3};\dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow$ *M không thuộc đoạn BC.*

• *Với* $a=b$ *: chọn* $a=b=1 \Rightarrow BC: x+y-3=0 \Rightarrow B(4;-1),\ C(-4;7) \Rightarrow$ *M thuộc đoạn BC.*

Gọi trung điểm của BC là $I(0;3)$*.Ta có:* $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IC}) = DI^2 - \dfrac{BC^2}{4} \geq -\dfrac{BC^2}{4}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow D \equiv I$*. Vậy* $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ *nhỏ nhất khi D(0; 3).*

HT 156. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm A(2;–3), B(3;–2), tam giác ABC có diện tích bằng $\dfrac{3}{2}$; trọng tâm G của ΔABC nằm trên đường thẳng (d): $3x-y-8=0$. Tìm bán kính đường tròn nội tiếp Δ ABC.

Giải

• *Gọi C(a; b), (AB): x –y –5 =0* $\Rightarrow$ *d(C; AB) =* $\dfrac{|a-b-5|}{\sqrt{2}} = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AB}$

$\Rightarrow |a-b-5| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a-b=8 & (1) \\ a-b=2 & (2) \end{array}\right.$; *Trọng tâm G* $\left(\dfrac{a+5}{3};\dfrac{b-5}{3}\right) \in$ *(d)* $\Rightarrow$ *3a –b =4 (3)*

• *(1), (3)* $\Rightarrow$ *C(–2; 10)* $\Rightarrow$ *r =* $\dfrac{S}{p} = \dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{65}+\sqrt{89}}$

• *(2), (3)* $\Rightarrow$ *C(1; –1)* $\Rightarrow r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{3}{\sqrt{2}+2\sqrt{5}}$

HT 157. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có diện tích bằng 96. Gọi $M(2;0)$ là trung điểm của AB, phân giác trong của góc A có phương trình: $d: x-y-10=0$. Đường thẳng AB tạo với *d* một góc α thỏa mãn $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. Xác định các đỉnh của tam giác ABC.

Giải

Gọi M' *đối xứng với* $M(2;0)$ *qua* $d: x-y-10=0 \Rightarrow M'(10;-8)$.

PT đường thẳng AB qua $M(2;0)$ *có dạng:* $a(x-2)+by=0$.

AB tạo với $d: x-y-10=0$ *một góc* $\alpha \Rightarrow \dfrac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2}} = \cos\alpha = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=7b \\ b=7a \end{array}\right.$

• *Với* $a=7b \Rightarrow$ *AB:* $7x+y-14=0$. AB *cắt d tại* $A \Rightarrow A(3;-7) \Rightarrow B(1;7) \Rightarrow AB = 10\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta AM'B} = \frac{1}{2}AB.d(M',AB) = 48 = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM'} \Rightarrow C(17;-9)$

• *Với* $b = 7a$ $\Rightarrow$*AB:* $x + 7y - 2 = 0$. AB *cắt* d *tại* $A \Rightarrow A(9;-1) \Rightarrow B(-5;1) \Rightarrow AB = 10\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta AM'B} = \frac{1}{2}AB.d(M',AB) = 48 = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM'} \Rightarrow C(11;-15)$

Vậy, $A(3;-7)$, $B(1;7)$, $C(17;-9)$ *hoặc* $A(9;-1)$, $B(-5;1)$, $C(11;-15)$.

HT 158. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Đỉnh B(1; 1). Đường thẳng AC có phương trình: $4x + 3y - 32 = 0$. Trên tia BC lấy điểm M sao cho $BC.BM = 75$. Tìm đỉnh C biết bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC bằng $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Giải

Đường thẳng (AB) qua B và vuông góc với (AC) $\Rightarrow (AB): 3x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow A(5;4)$.

Gọi E là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác AMC với BA thì ta có:

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = 75$ *(vì M nằm trên tia BC)* $\Rightarrow$ *tìm được* $E(13;10)$.

Vì ΔAEC vuông tại A nên CE là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔAMC $\Rightarrow EC = 5\sqrt{5}$. *Do đó C là giao của đường tròn tâm E bán kính r =* $5\sqrt{5}$ *với đường thẳng AC.*

$\Rightarrow$ *Toạ độ của C là nghiệm của hệ* $\begin{cases} 4x + 3y - 32 = 0 \\ (x-13)^2 + (y-10)^2 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; y = 8 \\ x = 8; y = 0 \end{array}\right.$.

Vậy: $C(2;8)$ *hoặc* $C(8;0)$.

HT 159. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC: $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B nằm trên trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng 2. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

Toạ độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1;0)$.

Đường thẳng BC có hệ số góc $k = \sqrt{3}$ *nên* $\widehat{ABC} = 60^0$ $\Rightarrow$ *đường phân giác trong BE của tam giác ABC có hệ số góc* $k' = \frac{\sqrt{3}}{3}$ *nên có phương trình:* $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Tâm $I(a;b)$ *của đường tròn nội tiếp ΔABC thuộc BE và* $d(I,Ox) = 2$ *nên:* $|b| = 2$.

+ Với $b = 2 \Rightarrow a = 1 + 2\sqrt{3} \Rightarrow I(1 + 2\sqrt{3};2)$.

+ Với $b = -2 \Rightarrow a = 1 - 2\sqrt{3} \Rightarrow I(1 - 2\sqrt{3}; -2)$.

Đường phân giác trong AF có dạng: $y = -x + m$. *Vì AF đi qua I nên:*

+ Nếu $I(1 + 2\sqrt{3}; 2)$ *thì* $m = 3 + 2\sqrt{3} \Rightarrow (\text{AF}): y = -x + 3 + 2\sqrt{3} \Rightarrow A(3 + 2\sqrt{3}; 0)$.

Do AC ⊥ Ox nên AC có phương trình: $x = 3 + 2\sqrt{3}$. *Từ đó suy ra* $C(3 + 2\sqrt{3}; 6 + 2\sqrt{3})$.

Suy ra toạ độ trọng tâm $G\left(\frac{4 + 4\sqrt{3}}{3}; \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$.

+ Nếu $I(1 - 2\sqrt{3}; -2)$ *thì* $m = -1 - 2\sqrt{3} \Rightarrow (\text{AF}): y = -x - 1 - 2\sqrt{3} \Rightarrow A(-1 - 2\sqrt{3}; 0)$.

Do AC ⊥ Ox nên AC có phương trình: $x = -1 - 2\sqrt{3}$. *Từ đó suy ra* $C\left(-1 - 2\sqrt{3}; -6 - 2\sqrt{3}\right)$.

Suy ra toạ độ trọng tâm $G\left(\frac{-1 - 4\sqrt{3}}{3}; \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Vậy có hai điểm thoả YCBT: $G\left(\frac{4 + 4\sqrt{3}}{3}; \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$ *hoặc* $G\left(\frac{-1 - 4\sqrt{3}}{3}; \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$.

HT 160. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A. Đỉnh A có toạ độ là các số dương, hai điểm B, C nằm trên trục Ox, phương trình cạnh $AB: y = 3\sqrt{7}(x - 1)$. Biết chu vi của ΔABC bằng 18, tìm toạ độ các đỉnh A, B, C.

Giải

Ta có: $B = (AB) \cap \text{Ox} \Rightarrow B(1; 0)$. *Giả sử* $A\left(a; 3\sqrt{7}(a - 1)\right)$ *(* $a > 1$ *vì* $x_A > 0, y_A > 0$ *).*

Gọi AH là đường cao của ΔABC $\Rightarrow H(a; 0) \Rightarrow C(2\text{a} - 1; 0)$.

$\Rightarrow BC = 2(a - 1),\ AB = AC = 8(a - 1).\ \ P_{\Delta ABC} = 18 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow C(3; 0), A\left(2; 3\sqrt{7}\right)$.

Vậy: $A\left(2; 3\sqrt{7}\right)$, $B(1; 0)$, $C(3; 0)$.

PHẦN IV TỨ GIÁC

Toàn bộ tài liệu luyện thi đại học môn toán của thầy Lưu Huy Thưởng:

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 161. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có diện tích bằng 4. Biết A(1; 0), B(0; 2) và giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $y = x$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;2) \Rightarrow AB = \sqrt{5}$. Phương trình AB: $2x + y - 2 = 0$.

$I \in (d): y = x \Rightarrow I(t;t)$. I là trung điểm của AC và BD nên: $C(2t-1;2t)$, $D(2t;2t-2)$

Mặt khác: $S_{ABCD} = AB.CH = 4$ (CH: chiều cao) $\Rightarrow CH = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Ngoài ra: $d(C;AB) = CH \Leftrightarrow \dfrac{|6t-4|}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{4}{3} \Rightarrow C\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3}\right), D\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{2}{3}\right) \\ t = 0 \Rightarrow C(-1;0), D(0;-2) \end{array}\right.$

Vậy $C\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3}\right), D\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ hoặc $C(-1;0), D(0;-2)$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) Với $S_{ABCD} = 4$, A(2; 0), B(3; 0), $I = AC \cap BD$, $I \in d: y = x$.

ĐS: $C(3;4); D(2;4)$ hoặc $C(-5;-4); D(-6;-4)$.

b) Với $S_{ABCD} = 4$, A(0; 0), B(-1; 2), $I = AC \cap BD$, $I \in d: y = x - 1$.

ĐS: C(2; 0), D(3; –2) hoặc $C\left(\dfrac{-2}{3};\dfrac{-8}{3}\right)$, D$\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{-14}{3}\right)$

HT 162. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang vuông ABCD vuông tại A và D có đáy lớn là CD, đường thẳng AD có phương trình $d_1: 3x - y = 0$, đường thẳng BD có phương trình $d_2: x - 2y = 0$, góc tạo bởi hai đường thẳng BC và AB bằng 45^0. Viết phương trình đường thẳng BC biết diện tích hình thang bằng 24 và điểm B có hoành độ dương.

Giải

$D = d_1 \cap d_2 \Rightarrow D(0;0) \equiv O$.

VTPT của đường thẳng AD và BD lần lượt là $\vec{n}_1 = (3;-1)$, $\vec{n}_2 = (1;-2)$.

Ta có: $\cos\widehat{ADB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ADB} = 45^0 \Rightarrow$ AD = AB.

Vì $\widehat{(BC,AB)} = 45^0$ nên $\widehat{BCD} = 45^0 \Rightarrow$ ΔBCD vuông cân tại B ⇒ DC = 2AB.

$S_{ABCD} = 24 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(AB + CD)AD = \frac{3.AB^2}{2} = 24 \Rightarrow$ AB = 4 $\Rightarrow$ $BD = 4\sqrt{2}$.

Gọi $B\left(x_B; \frac{x_B}{2}\right) \in d_2, x_B > 0$. $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{x_B^2 + \left(\frac{x_B}{2}\right)^2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x_B = \frac{8\sqrt{10}}{5} \Rightarrow B\left(\frac{8\sqrt{10}}{5}; \frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$

Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với d_2 $\Rightarrow$Phương trình BC là: $2x + y - 4\sqrt{10} = 0$.

HT 163. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ O*xy*, cho hình thang cân ABCD (AB// CD, AB < CD). Biết A(0; 2), D(–2; –2) và giao điểm I của AC và BD nằm trên đường thẳng có phương trình $d: x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ của các đỉnh còn lại của hình thang khi góc $\widehat{AID} = 45^0$.

Giải

$I \in d \Rightarrow I(x; 4 - x)$. $AD = 2\sqrt{5}$; $IA = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$; $ID = \sqrt{2x^2 - 8x + 40}$

Trong ΔAID có: $\frac{IA^2 + ID^2 - AD^2}{2IA.ID} = \cos\widehat{AID} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$

+ Với $x = 2$ $\Rightarrow$ IA = 2, ID = 4$\sqrt{2}$ $\Rightarrow \overrightarrow{ID} = -\frac{ID}{IB}.\overrightarrow{IB}$

$\Rightarrow B\left(2 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}\right)$, $C\left(2 + 4\sqrt{2}; 2 + 4\sqrt{2}\right)$

+ Với $x = 4$ $\Rightarrow B\left(4 + 3\sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}\right)$, $C\left(4 + 4\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\right)$.

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 164. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$ và 2 điểm A(0; –4), B(4; 0). Tìm tọa độ 2 điểm C và D sao cho đường tròn (C) nội tiếp trong hình thang ABCD có đáy là AB và CD.

Giải

$(C): (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$ có tâm $I(1; -1)$ và $R = \sqrt{2}$.

PT cạnh AB: $x - y - 4 = 0$. PT cạnh CD có dạng: $x - y + c = 0$; $c \neq -4$

CD tiếp xúc với (C) $\Rightarrow d(I, CD) = R \Leftrightarrow \frac{|1 + 1 + c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow c = 0 \Rightarrow$ PT cạnh CD: $x - y = 0$

Nhận thấy các đường thẳng $x = 0$, $x = 4$ không phải là tiếp tuyến của (C).

Giả sử phương trình cạnh AD có dạng: $kx - y - 4 = 0$ $(k \neq 1)$.

Ta có: $d(I, AD) = R \Leftrightarrow |k - 3| = \sqrt{2(k^2 + 1)} \Leftrightarrow k^2 + 6k - 7 = 0 \Leftrightarrow k = -7$

$\Rightarrow$ PT cạnh AD: $7x + y + 4 = 0 \Rightarrow D\left(\frac{-1}{2};\frac{-1}{2}\right)$. PT cạnh BC: $x + 7y - 4 = 0 \Rightarrow C\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

HT 165. Trong mặt phẳng tọa độ O*xy*, cho hình bình hành ABCD có hai đỉnh A(0; 1), B(3; 4) nằm trên parabol (P): $y = x^2 - 2x + 1$, tâm I nằm trên cung AB của (P). Tìm tọa độ hai đỉnh C, D sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất.

Giải

I nằm trên cung AB của (P) nên $I(a;a^2 - 2a + 1)$ với 0 < a <3.

Do AB không đổi nên diện tích ΔIAB lớn nhất khi $d(I,AB)$ lớn nhất

Phương trình AB: $x - y + 1 = 0$.

$d(I,AB) = \frac{|a - a^2 + 2a - 1 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|-a^2 + 3a|}{\sqrt{2}} = \frac{-a^2 + 3a}{\sqrt{2}}$ (do a $\in$(0;3))

$\Rightarrow$ d (I, AB) đạt GTLN $\Leftrightarrow f(a) = -a^2 + 3a$ đạt GTLN $\Leftrightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$

Do I là trung điểm của AC và BD nên ta có $C\left(3;-\frac{1}{2}\right)$; $D\left(0;-\frac{7}{2}\right)$.

HT 166. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$. Đường thẳng chứa cạnh AB có phương trình $x - 2y + 2 = 0$, AB = 2AD. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C, D, biết đỉnh A có hoành độ âm.

Giải

Gọi M là hình chiếu của I trên AB.

Khi đó, $IM \perp AB \Rightarrow IM: 2x + y + c_1 = 0$

IM qua $I(\frac{1}{2};0) \Rightarrow c_1 = -1 \Rightarrow IM: 2x + y - 1 = 0$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(0;1)$

Gọi $A(2a - 2;a)$ Điều kiến: $2a - 2 < 0 \Leftrightarrow a < 1$

Ta có: $\begin{cases} AB = 2AM \\ AD = 2d(I,AB) \Rightarrow AM = 2d(I,AB) \\ AB = 2AD \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2a-2)^2+(a-1)^2} = 2.\dfrac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5a^2 - 10a + 5 = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 (t.m) \\ a = 2 (ko\, t.m) \end{array}\right.$

Với $a = 0 \Rightarrow A(-2;0)$. Vì M là trung điểm AB nên: $B(2;2)$

I là trung điểm của AC và BD nên: $C(3;0), D(-1;-2)$

Kết luận: $A(-2;0)$, $B(2;2)$, $C(3;0)$, $D(-1;-2)$.

HT 167. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Biết $AB = 2BC$, đường thẳng AB đi qua điểm $M\left(-\frac{4}{3};1\right)$, đường thẳng BC đi qua điểm $N(0;3)$, đường thẳng AD đi qua điểm $P\left(4;-\frac{1}{3}\right)$, đường thẳng CD đi qua điểm $Q(6;2)$. Viết phương trình các cạnh của hình chữ nhật ABCD.

Giải

Dễ thấy đường thẳng AB không song song với trục Oy $\Rightarrow$ PT AB có dạng: $y = k\left(x + \frac{4}{3}\right) + 1$.

$\Rightarrow$ Phương trình DC: $y = k(x-6)+2$, BC: $x + ky - 3k = 0$, AD: $x + ky - 4 + \frac{k}{3} = 0$.

Vì $AB = 2BC$ nên $d(P, BC) = 2d(M, DC) \Leftrightarrow \dfrac{\left|4 - \frac{k}{3} - 3k\right|}{\sqrt{1+k^2}} = \dfrac{\left|-\frac{4}{3}k - 1 - 6k + 2\right|}{\sqrt{1+k^2}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10k - 12 = 6 - 44k \\ 10k - 12 = 44k - 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \frac{1}{3} \\ k = -\frac{3}{17} \end{array}\right.$.

+ Với $k = \frac{1}{3}$ thì $AB: y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{9}$, $DC: y = \frac{1}{3}x$, $BC: x - \frac{1}{3}y - 1 = 0$, $AD: x + \frac{1}{3}y - \frac{35}{9} = 0$.

+ Với $k = -\frac{3}{17}$ thì $AB: y = -\frac{3}{17}x + \frac{13}{17}$, $DC: y = -\frac{3}{17}x + \frac{52}{17}$,

$BC: x - \frac{3}{17}y + \frac{9}{17} = 0$, AD: $x - \frac{3}{17}y - \frac{71}{17} = 0$.

HT 168. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt đi qua các điểm $M(4;5), N(6;5), P(5;2), Q(2;1)$ và diện tích bằng 16. Viết phương trình các cạnh của hình chữ nhật ABCD.

Giải

PT cạnh AB có dạng: $a(x-4) + b(y-5) = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$.

$\Rightarrow$ PT cạnh BC: $b(x-6) - a(y-5) = 0$.

Diện tích hình chữ nhật: $S = d(P,AB).d(Q,BC) = \dfrac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\dfrac{|-4b+4a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 16$

$\Leftrightarrow \left|(a-3b)(a-b)\right| = 4(a^2+b^2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1,\ b=1 \\ a=-\dfrac{1}{3},\ b=1 \end{array}\right.$.

Vậy: $AB: -x+y-1=0$ hoặc $AB: -x+3y-11=0$. Từ đó suy ra PT các cạnh còn lại.

HT 169. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có phương trình cạnh AB: $x-2y-1=0$, đường chéo BD: $x-7y+14=0$ và đường chéo AC đi qua điểm M(2; 1). Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Giải

$B = BD \cap AB \Rightarrow B(7;3)$. PT đường thẳng BC: $2x+y-17=0$.

$A \in AB \Rightarrow A(2a+1;a), C \in BC \Rightarrow C(c;17-2c), a \neq 3, c \neq 7$.

$I\left(\dfrac{2a+c+1}{2};\dfrac{a-2c+17}{2}\right)$ là trung điểm của AC, BD.

I$\in BD \Leftrightarrow 3c-a-18=0 \Leftrightarrow a=3c-18 \Rightarrow A(6c-35;3c-18)$

M, A, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}$ cùng phương $\Rightarrow c^2-13c+42=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=7\ \ (loai) \\ c=6 \end{array}\right.$

Với c = 6 $\Rightarrow$ A(1; 0), C(6; 5) , D(0; 2), B(7; 3).

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) $(AB): x-y+1=0$, $(BD): 2x+y-1=0$, $M(-1;1)$.

ĐS: $A\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right), B(0;1), C(1;0), D\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

HT 170. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 12, tâm I thuộc đường thẳng $(d): x-y-3=0$ và có hoành độ $x_I = \dfrac{9}{2}$, trung điểm của một cạnh là giao điểm của (*d*) và trục Ox. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật, biết $y_A > 0$.

Giải

$I\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. Gọi M = d $\cap$ Ox là trung điểm của cạnh AD, suy ra M(3;0). $AB = 2IM = 3\sqrt{2}$.

$S_{ABCD} = AB.AD = 12 \Leftrightarrow AD = \dfrac{S_{ABCD}}{AB} = \dfrac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$

$\begin{cases} AD \perp (d) \\ M \in AD \end{cases}$, suy ra phương trình AD: $x+y-3=0$.

Lại có MA = MD = $\sqrt{2}$. Vậy tọa độ A, D là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x+y-3=0 \\ \sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+3 \\ (x-3)^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$. Vậy A(2;1), D(4;-1),

$I\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của AC, suy ra: $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_C}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=2x_I-x_A=9-2=7 \\ y_C=2y_I-y_A=3-1=2 \end{cases}$

Tương tự I cũng là trung điểm BD nên ta có: B(5;4).

Vậy tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật là $A(2;1), B(5;4), C(7;2), D(4;-1)$.

Câu hỏi tương tự:

a) Giả thiết như trên với tâm $I=d_1\cap d_2$, $d_1: x-y-3=0$ và $d_2: x+y-6=0$, $M=d_1\cap Ox$

ĐS: . $A(2;1), B(5;4), C(7;2), D(4;-1)$.

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 171. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm I(6; 2) là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD. Điểm M (1; 5) thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng Δ: $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Giải

I (6; 2); M (1; 5). Δ : x + y – 5 = 0, E ∈ Δ ⇒ E(m; 5 – m); Gọi N là trung điểm của AB.

I trung điểm NE ⇒ $\begin{cases} x_N=2x_I-x_E=12-m \\ y_N=2y_I-y_E=4-5+m=m-1 \end{cases}$ ⇒ N (12 – m; m – 1)

$\overrightarrow{MN}=(11-m;m-6)$; $\overrightarrow{IE}=(m-6;3-m)$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{IE}=0 \Leftrightarrow (11-m)(m-6)+(m-6)(3-m)=0 \Leftrightarrow m=6;\ m=7$

+ $m=6 \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(5;0) \Rightarrow (AB): y=5$

+ $m=7 \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(4;1) \Rightarrow (AB): x-4y+19=0$.

Câu hỏi tương tự:

a) Với $I(2;2)$, $M(-3;1)$, $E\in\Delta: x+2y-4=0$. ĐS: $x-y+4=0$ hoặc $4x-7y+19=0$

HT 172. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có các đường thẳng AB, AD lần lượt đi qua các điểm $M(2;3), N(-1;2)$. Hãy lập phương trình các đường thẳng BC và CD, biết rằng hình chữ nhật ABCD có tâm là $I\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$ và độ dài đường chéo AC bằng $\sqrt{26}$.

Giải

Giả sử đường thẳng AB có VTPT là $\vec{n}_{AB} = (a;b)\ (a^2 + b^2 \neq 0)$, do AD vuông góc với AB nên đường thẳng AD có vtpt là $\vec{n}_{AD} = (b;-a)$. Do đó phương trình AB, AD lần lượt là:

$AB: a(x-2) + b(y-3) = 0;\ \ AD: b(x+1) - a(y-2) = 0$.

Ta có $AD = 2d(I;AB) = \dfrac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \ AB = 2d(I;AD) = \dfrac{|7b+a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Do đó: $AC^2 = AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow 26 = \dfrac{(a-3b)^2 + (7b+a)^2}{a^2+b^2} \Leftrightarrow 3a^2 - ab - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ a = \dfrac{4b}{3} \end{array}\right.$

Gọi M', N' lần lượt là điểm đối xứng của M, N qua I suy ra $M'(3;0) \in (CD),\ \ N'(6;1) \in (BC)$

+ Nếu $a = -b$, chọn $a = 1,\ b = -1$ suy ra $\vec{n}_{AB} = (1;-1),\ \ \vec{n}_{AD} = (1;1)$

PT đường thẳng CD có VTPT là $\vec{n}_{AB} = (1;-1)$ và đi qua điểm $M'(3;0): (CD): x - y - 3 = 0$

PT đường thẳng BC có VTPT là $\vec{n}_{AD} = (1;1)$ và đi qua điểm $N'(6;1): (BC): x + y - 7 = 0$

+ Nếu $a = \dfrac{4b}{3}$, chọn $a = 4,\ b = 3$ suy ra $\vec{n}_{AB} = (4;3),\ \vec{n}_{AD} = (3;-4)$

PT đường thẳng CD có VTPT là $\vec{n}_{AB} = (4;3)$ và đi qua điểm $M'(3;0): (CD): 4x + 3y - 12 = 0$

PT đường thẳng BC có VTPT là $\vec{n}_{AD} = (3;-4)$ và đi qua điểm $N'(6;1): (BC): 3x - 4y - 14 = 0$

Vậy: $(BC): x + y - 7 = 0$, $(CD): x - y - 3 = 0$

hoặc $(BC): 3x - 4y - 14 = 0$, $(CD): 4x + 3y - 12 = 0$.

HT 173. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho hình thoi ABCD có cạnh bằng 5 đơn vị, biết toạ độ đỉnh A(1; 5), hai đỉnh B, D nằm trên đường thẳng (d): $x - 2y + 4 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh B, C, D.

Giải

Gọi $I = AC \cap BD$

Ta có: $AO \perp BD \Rightarrow AI: 2x + y + c_1 = 0$

$AI\ qua\ A(1;5) \Rightarrow c_1 = -7 \Rightarrow AI: 2x + y - 7 = 0$

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow I(2;3)$

Ta có: I là trung điểm AC nên suy ra: $C(3;1)$

Gọi $B(2b-4;b)$. Theo đề bài: $AB = 5 \Leftrightarrow (2b-5)^2 + (b-5)^2 = 25$

$\Leftrightarrow 5b^2 - 30b + 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = 5 \end{array}\right.$

Với $b = 1 \Rightarrow B(-2;1) \Rightarrow D(6;5)$

Với $b = 5 \Rightarrow B(6;5) \Rightarrow D(-2;1)$

Kết luận: $B(-2;1); C(3;1); D(6;5)$ hoặc $B(6;5); C(3;1); D(-2;1)$

HT 174. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ: $x + y - 1 = 0$, các điểm A(0;–1), B(2; 1). Tứ giác ABCD là hình thoi có tâm nằm trên đường thẳng Δ. Tìm tọa độ các điểm C, D.

Giải

Gọi I(a; b) là tâm của hình thoi. Vì $I \in \Delta$ nên a + b – 1 = 0 hay b = 1 – a (1).

Ta có: $\overrightarrow{AI} = (a; b+1)$ và $\overrightarrow{BI} = (a-2; b-1)$.

Do AI ⊥ BI ⇒ $a(a-2) + (b+1)(b-1) = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ⇒ $a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 2$.

• Với a = 0 thì I(0; 1) ⇒ C(0;3) và D(–2;1). • Với a = 2 thì I(2; –1) ⇒ C(4; –1) và D(2; –3).
Vậy có hai cặp điểm thỏa mãn: C(0;2) và D(–2;1) hoặc C(4;–1) và D(2;–3).

HT 175. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình thoi *ABCD* với A(1;0), đường chéo BD có phương trình $d: x - y + 1 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh *B, C, D*, biết $BD = 4\sqrt{2}$.

Giải

AC ⊥ BD ⇒ Phương trình AC: $x + y - 1 = 0$. Gọi $I = AC \cap BD \Rightarrow I(0;1) \Rightarrow C(-1;2)$

$BD = 4\sqrt{2} \Rightarrow IB = 2\sqrt{2}$. PT đường tròn tâm I bán kính $IB = 2\sqrt{2}$: $x^2 + (y-1)^2 = 8$

Toạ độ B, D là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 8 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B(2;3), D(-2;-1) \\ B(-2;-1), D(2;3) \end{array}\right.$

HT 176. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD biết phương trình của một đường chéo là $d: 3x + y - 7 = 0$, điểm B(0;–3). Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thoi biết diện tích hình thoi bằng 20.

Giải

Ta có $B(0;-3) \notin d \Rightarrow$ A, C ∈ d. Ph.trình BD: $x - 3y - 9 = 0$. Gọi $I = AC \cap BD \Rightarrow I(3;-2)$

$\Rightarrow D(6;-1)$. $BD = 2\sqrt{10}$. Gọi $A(a; 7-3a) \in d$.

$S_{ABCD} = d(A,BD).BD \Rightarrow \dfrac{|a-3(7-3a)-9|}{\sqrt{1^2+3^2}}.2\sqrt{10} = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} a=2 \\ a=4 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix} A_1(2;1); C_1(4;-5) \\ A_2(4;-5); C_2(2;1) \end{matrix}\right.$

HT 177. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho hình thoi ABCD có tâm $I(3;3)$ và $AC = 2BD$. Điểm $M\left(2;\dfrac{4}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N\left(3;\dfrac{13}{3}\right)$ thuộc đường thẳng CD. Viết phương trình đường chéo BD biết đỉnh B có hoành độ nhỏ hơn 3.

Giải

Tọa độ điểm N′ đối xứng với điểm N qua I là $N'\left(3;\dfrac{5}{3}\right) \Rightarrow$ N′ nằm trên đường thẳng AB.

Đường thẳng AB đi qua M, N′ có PT: $x - 3y + 2 = 0 \Rightarrow IH = d(I,AB) = \dfrac{|3-9+2|}{\sqrt{10}} = \dfrac{4}{\sqrt{10}}$

Do $AC = 2BD$ nên $IA = 2IB$. Đặt $IB = a > 0$. $\dfrac{1}{IA^2} + \dfrac{1}{IB^2} = \dfrac{1}{IH^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{5}{8} \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$

Đặt $B(x;y)$. Do $IB = \sqrt{2}$ và $B \in AB$ nên tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 2 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2 - 18y + 16 = 0 \\ x = 3y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{14}{5} \\ y = \dfrac{8}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 > 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Do $x_B < 3$ nên ta chọn $B\left(\dfrac{14}{5};\dfrac{8}{5}\right)$. Vậy, phương trình đường chéo BD là: $7x - y - 18 = 0$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) $I(2;1)$, $AC = 2BD$, $M\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$, $N(0;7)$, $x_B > 0$. ĐS: $B(1;-1)$

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 178. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho hình thoi ABCD có đường chéo BD nằm trên đường thẳng $\Delta : x - y - 2 = 0$. Điểm $M(4;-4)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh BC, điểm $N(-5;1)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB. Biết $BD = 8\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD, biết điểm D có hoành độ âm.

Giải

Lấy M′ là điểm đối xứng với M qua BD $\Rightarrow M'(-2;2)$.

Đường thẳng AB qua $N(-5;1)$ và $M'(-2;2) \Rightarrow$ Phương trình $AB : x - 3y + 8 = 0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - 3y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(7;5)$.

Giả sử $D(d;d-2) \in \Delta$, do $BD = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow (d-7)^2 + (d-7)^2 = 128 \Leftrightarrow d = -1 \Rightarrow D(-1;-3)$.

Gọi I là tâm của hình thoi $\Rightarrow I(3;1)$, khi đó đường thẳng AC qua I và vuông góc với BD

$\Rightarrow$ Phương trình $AC: x + y - 4 = 0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - 3y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;3) \Rightarrow C(5;-1)$.

HT 179. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình thoi ABCD có phương trình hai cạnh AB và AD lần lượt là $x + 2y - 2 = 0$ và $2x + y + 1 = 0$. Điểm $M(1;2)$ thuộc đường thẳng BD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi.

Giải

Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$

PT các đường phân giác góc A là: $\frac{x + 2y - 2}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2x + y + 1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (d_1): x - y + 3 = 0 \\ (d_2): 3x + 3y - 1 = 0 \end{array}\right.$.

• Trường hợp $(d_1): x - y + 3 = 0$.

Đường thẳng (BD) đi qua M và vuông góc với (d_1) nên $(BD): x + y - 3 = 0$.

Suy ra $B = AB \cap BD \Rightarrow B(4;-1)$, $D = AD \cap BD \Rightarrow D(-4;7)$.

Gọi $I = BD \cap (d_1) \Rightarrow I(0;3)$. Vì C đối xứng với A qua I nên $C\left(\frac{4}{3};\frac{13}{3}\right)$.

• Trường hợp $(d_2): 3x + 3y - 1 = 0$.

Đường thẳng (BD) đi qua M và vuông góc với (d_2) nên $(BD): x - y + 1 = 0$.

Suy ra $B = AB \cap BD \Rightarrow B(0;1)$, $D = AD \cap BD \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Gọi $I = BD \cap (d_2) \Rightarrow I\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. Vì C đối xứng với A qua I nên $C\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Vậy: $A\left(-\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$, $B(4;-1)$, $C\left(\frac{4}{3};\frac{13}{3}\right)$, $D(-4;7)$

hoặc $A\left(-\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$, $B(0;1)$, $C\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$, $D\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$

HT 180. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y+1)^2=8$ và điểm A thuộc đường thẳng (d): $x-2y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D, biết rằng $BD=2AC$ và hoành độ của điểm A không nhỏ hơn 2.

Giải

(C) có tâm $I(2;-1)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$, $IB=2IA$.

Trong tam giác vuông IAB ta có: $\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}=\frac{1}{IH^2}\Rightarrow\frac{5}{4IA^2}=\frac{1}{8}\Rightarrow IA=\sqrt{10}\Rightarrow IB=2\sqrt{10}$.

Giả sử $A(2t-3;t)\in d$ và $x_A\ge 2$. Ta có $IA=\sqrt{10}\Leftrightarrow\sqrt{(2t-5)^2+(t+1)^2}=\sqrt{10}\Leftrightarrow t=2$

Suy ra $A(1;2)$, do I là trung điểm AC nên $C(3;-4)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với AC ⇒ $\Delta: x-3y-5=0$.

Ta có B, D ∈ Δ và $IB=ID=2\sqrt{10}$ ⇒ Toạ độ của B, D là các nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x-3y-5=0\\(x-2)^2+(y+1)^2=40\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=8;\ y=1\\x=-4;\ y=-3\end{array}\right.\Rightarrow B(8;1),D(-4;-3)\text{ hoặc }B(-4;-3),\ D(8;1).$$

Vậy: $A(1;2)$, $B(8;1),C(3;-4),D(-4;-3)$ hoặc $A(1;2)$, $B(-4;-3),\ C(3;-4),\ D(8;1)$.

HT 181. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tâm $I\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$, hai điểm A, B lần lượt nằm trên các đường thẳng $d_1: x+y-3=0$ và đường thẳng $d_2: x+y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

Giải

Giả sử $A(a;3-a)\in d_1; B(b;4-b)\in d_2\Rightarrow\overrightarrow{IA}=\left(a-\frac{5}{2};\frac{1}{2}-a\right);\overrightarrow{IB}=\left(b-\frac{5}{2};\frac{3}{2}-b\right)$

ABCD vuông tâm I nên $\begin{cases}IA=IB\\\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}\vee\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$

- Với a = 2; b = 1 ⇒ A(2; 1); B(1; 3), C(3; 4); D(4; 2).
- Với a = 1; b = 3 ⇒ A(1; 2); B(3; 1), C(4; 3); D(2; 4).

HT 182. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD ngoại tiếp đường tròn (C): $(x-2)^2+(y-3)^2=10$. Xác định toạ độ các đỉnh A, C của hình vuông, biết cạnh AB đi qua điểm M(–3; –2) và điểm A có hoành độ $x_A > 0$.

Giải

(C) có tâm I(2; 3) và bán kính $R=\sqrt{10}$.

PT AB đi qua M(–3; –2) có dạng $ax+by+3a+2b=0$ $(a^2+b^2\ne 0)$.

Ta có $d(I,AB)=R \Leftrightarrow \sqrt{10}=\dfrac{|2a+3b+3a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow 10(a^2+b^2)=25(a+b)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-3b \\ b=-3a \end{array}\right.$.

• Với $a=-3b \Rightarrow$ AB: $3x-y+7=0$. Gọi $A(t;3t+7),(t>0)$.

Ta có $IA=R\sqrt{2} \Rightarrow t=0;t=-2$ (không thoả mãn).

• Với $b=-3a \Rightarrow$ AB: $x-3y-3=0$. Gọi $A(3t+3;t)$, $(t>-1)$.

Ta có $IA=R\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1\ (loaïi) \end{array}\right. \Rightarrow$ A(6; 1) $\Rightarrow$ C(−2; 5).

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 183. Trong mặt phẳng *Oxy*, cho hình vuông *ABCD* có tâm $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. Các đường thẳng *AB, CD* lần lượt đi qua các điểm $M(-4;-1)$, $N(-2;-4)$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông đó biết *B* có hoành độ âm.

Giải

Gọi M′, N′ là các điểm đối xứng với M, N qua I $\Rightarrow$ $M'(7;2)$, $N'(5;5)$. Ta có: N′ ∈ AB.

Phương trình AB: $2x-3y+5=0$. Gọi H là hình chiếu của I lên AB $\Rightarrow H\left(\dfrac{1}{2};2\right)$

Gọi $B(a;b), a<0$. Ta có $\begin{cases} B\in AB \\ HA=HI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b=-5 \\ \left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+(b-2)^2=\dfrac{13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow B(-1;1)$.

Khi đó $A(2;3), C(1;-2), D(4;0)$.

HT 184. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ trong đó A thuộc đường thẳng $d_1: x+y-1=0$ và C,D nằm trên đường thẳng $d_2: 2x-y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết hình vuông có diện tích bằng 5.

Giải

Giả sử $A(a;1-a)\in d_1$. Ta có $S_{ABCD}=5 \Leftrightarrow d(A,d_2)=\sqrt{5} \Leftrightarrow a=1$ hoặc $a=\dfrac{-7}{3}$.

+ Với $a=1 \Rightarrow A(1;0) \Rightarrow$ Phương trình cạnh $AD: x+2y-1=0 \Rightarrow D(-1;1)$.

Giả sử $C(x;y)$. Ta có: $\begin{cases} C\in d_2 \\ DC=\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow C(0;3)$ hoặc $C(-2;-1)$

– Với $C(0;3) \Rightarrow$ Trung điểm I của AC là $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow B(2;2)$

– Với $C(-2;-1) \Rightarrow$ Trung điểm I của AC là $I\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow B(0;-2)$

+ Với $a = \frac{-7}{3} \Rightarrow A\left(\frac{-7}{3};\frac{10}{3}\right)$. Tương tự như trên ta tìm được:

$D\left(\frac{-1}{3};\frac{7}{3}\right), C\left(\frac{-4}{3};\frac{1}{3}\right), B\left(\frac{-10}{3};\frac{4}{3}\right)$ hoặc $D\left(\frac{-1}{3};\frac{7}{3}\right), C\left(\frac{2}{3};\frac{13}{3}\right), B\left(\frac{-4}{3};\frac{16}{3}\right)$.

Vậy có 4 hình vuông $ABCD$ thỏa mãn yêu cầu bài toán: $A(1;00, B(2;2), C(0;3), D(-1;1)$

hoặc $A(1;0), B(0;-2), C(-2;-1), D(-1;1)$ hoặc $A\left(\frac{-7}{3};\frac{10}{3}\right), B\left(\frac{-10}{3};\frac{4}{3}\right), C\left(\frac{-4}{3};\frac{1}{3}\right), D\left(\frac{-1}{3};\frac{7}{3}\right)$

hoặc $A\left(\frac{-7}{3};\frac{10}{3}\right), B\left(\frac{-4}{3};\frac{16}{3}\right), C\left(\frac{2}{3};\frac{13}{3}\right), D\left(\frac{-1}{3};\frac{7}{3}\right)$

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 185. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm $E(1;-1)$ là tâm của một hình vuông, một trong các cạnh của nó có phương trình $d: x - 2y + 12 = 0$. Viết phương trình các cạnh còn lại của hình vuông.

Giải

Giả sử cạnh AB nằm trên đường thẳng $d: x - 2y + 12 = 0$. Gọi H là hình chiếu của E lên đường thẳng AB $\Rightarrow$ $H(-2;5) \Rightarrow AH = BH = EH = \sqrt{45}$.

Ta có: $\begin{cases} A, B \in d \\ AH = BH = \sqrt{45} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 12 = 0 \\ (x+2)^2 + (y-5)^2 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4;\ y = 8 \\ x = -8;\ y = 2 \end{array}\right. \Rightarrow A(4;8), B(-8;2)$

$\Rightarrow C(-2;-10) \Rightarrow$ Phương trình các cạnh còn lại: $AD: 2x + y - 16 = 0$; $BC: 2x + y + 14 = 0$; $CD: x - 2y - 18 = 0$.

HT 186. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho hình vuông ABCD biết các điểm M(2; 1); N(4; –2); P(2; 0); Q(1; 2) lần lượt thuộc cạnh AB, BC, CD, AD. Hãy lập phương trình các cạnh của hình vuông.

Giải

Giả sử đường thẳng AB qua M và có VTPT là $\vec{n} = (a;b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)

$\Rightarrow$ VTPT của BC là: $\vec{n}_1 = (-b;a)$.

Phương trình AB có dạng: a(x –2) +b(y –1)= 0 $\Leftrightarrow$ ax + by –2a –b =0

BC có dạng: –b(x – 4) +a(y+ 2) =0 $\Leftrightarrow$ – bx + ay +4b + 2a =0

Do ABCD là hình vuông nên d(P; AB) = d(Q; BC) $\Leftrightarrow \frac{|-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|3b+4a|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -2a \\ b = -a \end{array}\right.$

- b = –2a: AB: x – 2y = 0 ; CD: x – 2y –2 =0; BC: 2x +y – 6= 0; AD: 2x + y – 4 =0

- b = –a: AB: –x + y+ 1 =0; BC: –x –y + 2= 0; AD: –x –y +3 =0; CD: –x + y+ 2 =0

HT 187. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ và đường thẳng $d: x + y - 1 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD ngoại tiếp (C) biết A ∈ *d*.

Giải

(C) có tâm I(4, –3), bán kính R = 2. Ta thấy $I \in d$. Vậy AI là một đường chéo của hình vuông ngoại tiếp đường tròn. Ta có: $x = 2$ và $x = 6$ là 2 tiếp tuyến của (C) nên:

– Hoặc là A là giao điểm các đường (d) và $x = 2 \Rightarrow$ A(2; –1)

– Hoặc là A là giao điểm các đường (d) và $x = 6 \Rightarrow$ A(6, –5)

• A(2, –1) ⇒ B(2, –5); C(6, –5); D(6, –1) • A(6, –5) ⇒ B(6, –1); C(2, –1); D(2, –5)

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 188. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD có $A(-2;6)$, đỉnh B thuộc đường thẳng $d: x - 2y + 6 = 0$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên 2 cạnh BC, CD sao cho BM = CN. Xác định tọa độ đỉnh C, biết rằng AM cắt BN tại điểm $I\left(\frac{2}{5};\frac{14}{5}\right)$.

Giải

Giả sử $B(2y - 6; y) \in d$.

Ta thấy $\Delta AMB = \Delta BNC \Rightarrow AI \perp BI \Rightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(2;4)$

Phương trình $BC: 2x - y = 0 \Rightarrow C(c;2c)$, $AB = 2\sqrt{5}$, $BC = \sqrt{(c-2)^2 + (2c-4)^2}$

$AB = BC \Rightarrow |c - 2| = 2 \Rightarrow C(0;0); C(4;8)$

Vì I nằm trong hình vuông nên I, C cùng phía với đường thẳng $AB \Rightarrow C(0;0)$.

HT 189. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD trên đoạn AC lấy điểm M sao cho AC = 4AM và N là trung điểm của cạnh CD. Chứng minh rằng BMN là tam giác vuông cân.

Giải

Goi a là độ dài cạnh hình vuông ABCD. Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho A(0;0), B(a;0), C(a;a) và D(0;a) ⇒ $M\left(\frac{1}{4}a;\frac{1}{4}a\right)$, $N\left(\frac{1}{2}a;a\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{4}a;\frac{3}{4}a\right)$, $\overrightarrow{MB} = \left(\frac{3}{4}a;\frac{-1}{4}a\right)$

Từ đó có $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MB} = 0$ và $MN = MB = a\sqrt{\frac{5}{8}} \Rightarrow \Delta BMN$ vuông cân tại M.

HT 190. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình vuông có đỉnh $A(-4;5)$ và một đường chéo có phương trình $\Delta: 7x - y + 8 = 0$. Viết phương trình các cạnh của hình vuông.

Giải

Vì $A \notin \Delta$ nên đường chéo BD nằm trên Δ.

PT đường thẳng d đi qua A có dạng: $a(x+4)+b(y-5)=0$ ($a^2+b^2 \neq 0$)

d hợp với BD một góc 45^0 $\Leftrightarrow \dfrac{|7a-b|}{\sqrt{50}\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3,\ b=-4 \\ a=4,\ b=3 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow (AB): 3x-4y+31=0$, $(AD): 4x+3y+1=0$.

Gọi I là tâm hình vuông $\Rightarrow I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{2}\right) \Rightarrow C(3;4)$

$\Rightarrow (BC): 4x+3y-24=0$, $(CD): 3x-4y+7=0$

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 191. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh $A(4;5)$, đường chéo BD có phương trình $y-3=0$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình vuông đó.

Giải

Đường chéo AC vuông góc với BD nên PT có dạng: $x+c=0$. AC đi qua A nên $c=-4$.

$\Rightarrow (AC): x-4=0 \Rightarrow I(4;3)$.

Đường tròn (C) ngoại tiếp hình vuông ABCD có tâm $I(4;3)$, bán kính $R=AI=2$

$\Rightarrow$ Phương trình (C): $(x-4)^2+(y-3)^2=4$.

Toạ độ các điểm B, D là các nghiệm của hệ: $\begin{cases} y=3 \\ (x-4)^2+(y-3)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6,\ y=3 \\ x=2,\ y=3 \end{array}\right.$.

Vậy: $B(6;3), C(4;1), D(2;3)$ hoặc $B(2;3), C(4;1), D(6;3)$

HT 192. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD có M là trung điểm của BC, phương trình đường thẳng $DM: x-y-2=0$, đỉnh $C(3;-3)$, đỉnh A nằm trên đường thẳng $d: 3x+y-2=0$. Xác định toạ độ các đỉnh còn lại của hình vuông đó.

Giải

Giả sử $A(t;2-3t) \in d$. Ta có: $d(A,DM)=2d(C,DM) \Leftrightarrow \dfrac{|4t-4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2.4}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-1 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow A(3;-7)$ hoặc $A(-1;5)$. Mặt khác, A và C nằm về hai phía đối với DM nên chỉ có $A(-1;5)$ thoả mãn.

Gọi $D(m;m-2) \in DM \Rightarrow \overrightarrow{AD}=(m+1;m-7)$, $\overrightarrow{CD}=(m-3;m+1)$.

ABCD là hình vuông nên $\begin{cases} \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}=0 \\ DA=DC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(m-3)+(m-7)(m+1)=0 \\ (m+1)^2+(m-7)^2=(m-3)^2+(m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m=5$

$\Rightarrow D(5;3)$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow B(-3;-1)$.

Vậy: $A(-1;5)$, $B(-3;-1)$, $D(5;3)$.

PHẦN V ĐƯỜNG CO-NIC

Toàn bộ tài liệu luyện thi đại học môn toán của thầy Lưu Huy Thưởng:

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 193. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, Lập phương trình chính tắc của (E), biết:

a) Độ dài trục lớn bằng 10, trục nhỏ bằng 6.

b) Độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự bằng 8.

c) Độ dài trục lớn bằng 10, độ dài trục nhỏ bằng $\frac{3}{4}$ tiêu cự.

d) Tiêu cự bằng 8 và đi qua điểm $M\left(3;\frac{12}{5}\right)$.

e) Độ dài trục nhỏ bằng 6 và đi qua điểm $M\left(-4;\frac{9}{5}\right)$.

Giải

Phương trình chính tắc của elip có dạng: $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

a) Độ dài trục lớn bằng 10 $\Rightarrow 2a=10 \Leftrightarrow a=5$

Độ dài trục nhỏ bằng $6 \Leftrightarrow 2b=6 \Leftrightarrow b=3$

Vậy, Phương trình $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

b) Độ dài trục lớn bằng 10 $\Rightarrow 2a=10 \Leftrightarrow a=5$

Tiêu cự bằng $8 \Leftrightarrow 2c=8 \Leftrightarrow c=4$

Ta có: $b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=9$

Vậy, Phương trình $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

c) Độ dài trục lớn bằng 10 $\Rightarrow 2a=10 \Leftrightarrow a=5$

Độ dài trục nhỏ bằng $\frac{3}{4}$ tiêu cự $\Leftrightarrow 2b=\frac{3}{4}2c \Leftrightarrow b=\frac{3}{4}c \Leftrightarrow c=\frac{4}{3}b$

Ta có: $a^2=b^2+c^2 \Leftrightarrow a^2=b^2+\frac{16}{9}b^2=\frac{25}{9}b^2$

$b^2=\frac{9}{25}a^2=\frac{9}{25}.25=9$

Vậy, Phương trình $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

d) Tiêu cự bằng $8 \Leftrightarrow 2c = 8 \Leftrightarrow c = 4 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + 16$ (1)

Đi qua điểm $M\left(3;\dfrac{12}{5}\right) \Rightarrow \dfrac{9}{a^2} + \dfrac{\frac{144}{25}}{b^2} = 1 \Leftrightarrow 225b^2 + 144a^2 = 25a^2b^2$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được: $225b^2 + 144(b^2 + 16) = 25(b^2 + 16)b^2$

$\Leftrightarrow 25b^4 + 31b^2 - 2304 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 9 \\ b^2 = -\dfrac{256}{25} \end{array}\right. \Leftrightarrow b^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 25$

Vậy, Phương trình $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

e) Độ dài trục nhỏ bằng $6 \Leftrightarrow 2b = 6 \Leftrightarrow b = 3$

Elip đi qua $M\left(-4;\dfrac{9}{5}\right)$ nên suy ra: $\dfrac{16}{a^2} + \dfrac{\frac{81}{25}}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{16}{a^2} + \dfrac{9}{25} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{16}{a^2} = \dfrac{16}{25} \Leftrightarrow a^2 = 25$

Vậy, Phương trình $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

HT 194. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, Lập phương trình chính tắc của (E), biết:

a) Một tiêu điểm là $F_1(-4;0)$ và độ dài trục lớn bằng 10.

b) Một tiêu điểm là $F_2(4;0)$ và đi qua điểm $M\left(\dfrac{5\sqrt{5}}{3};-2\right)$.

c) Đi qua hai điểm $M(1;\dfrac{6\sqrt{6}}{5})$, $N\left(-2;\dfrac{3\sqrt{21}}{5}\right)$.

Giải

Phương trình chính tắc của elip : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

a) Ta có : Tiêu điểm $F_1(-4;0) \Rightarrow c = 4$

Elip có độ dài trục lớn bằng $10 \Rightarrow 2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$

Suy ra : $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$

Vậy, Phương trình $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

b) Ta có : Tiêu điểm $F_1(4;0) \Rightarrow c = 4 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + 16$ (1)

Elip đi qua điểm $M\left(\frac{5\sqrt{5}}{3};-2\right) \Rightarrow \frac{\frac{125}{9}}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \Leftrightarrow 125b^2+36a^2=9a^2b^2$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được: $125b^2+36(b^2+16)=9(b^2+16)b^2 \Leftrightarrow 9b^4-17b^2-576=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=9 \\ b^2=-\frac{64}{9}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow b^2=9 \Rightarrow a^2=25$

Vậy, Phương trình $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

c) Elip đi qua hai điểm: $M(1;\frac{6\sqrt{6}}{5}),\ N\left(-2;\frac{3\sqrt{21}}{5}\right)$

Suy ra : $\begin{cases} \frac{1}{a^2}+\frac{\frac{216}{25}}{b^2}=1 \\ \frac{4}{a^2}+\frac{\frac{189}{25}}{b^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25b^2+216a^2=25a^2b^2 & (1) \\ 100b^2+189a^2=25a^2b^2 & (2)\end{cases}$

Lấy (1) – (2) vế với vế ta được: $-75b^2+27a^2=0 \Leftrightarrow a^2=\frac{25}{9}b^2$ thay vào (1) ta được :

$25b^2+216.\frac{25}{9}b^2=25.\frac{25}{9}.b^4 \Leftrightarrow b^2=9 \Rightarrow a^2=25$ (Vì $b>0$)

Vậy, Phương trình $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 195. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, Lập phương trình chính tắc của (E), biết:

a) Độ dài trục lớn bằng 10, tâm sai bằng $\frac{3}{5}$.

b) Một tiêu điểm là $F_1(-4;0)$ và tâm sai bằng $\frac{4}{5}$.

c) Độ dài trục nhỏ bằng 6, phương trình các đường chuẩn là $4x \pm 25 = 0$.

d) Một đỉnh là $A_1(-10;0)$, tâm sai bằng $\frac{3}{5}$.

e) Đi qua điểm $M\left(2;-\frac{5}{3}\right)$ và có tâm sai bằng $\frac{2}{3}$.

Giải

Phương trình chính tắc của elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

a) Độ dài trục lớn bằng $10 \Leftrightarrow 2a=10 \Leftrightarrow a=5$

Tâm sai : $e=\frac{c}{a}=\frac{c}{5}=\frac{3}{5} \Rightarrow c=3 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=25-9=16$

Vậy, phương trình elip : Vậy, Phương trình $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

b) Tiêu điểm $F_1(-4;0) \Rightarrow c=4$

Tâm sai : $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{a}=\frac{4}{5} \Rightarrow a=5 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=25-16=9$

Vậy, Phương trình $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

c) Độ dài trục nhỏ bằng $6 \Leftrightarrow 2b=6 \Leftrightarrow b=3\ a^2=9+c^2\ (1)$

phương trình các đường chuẩn là $4x \pm 25=0$. $\Rightarrow \frac{a}{e}=\frac{25}{4} \Leftrightarrow \frac{a^2}{c}=\frac{25}{4} \Leftrightarrow c=\frac{4a^2}{25}$ Thay vào (1) ta được :

$$a^2=9+\frac{16a^4}{625} \Leftrightarrow \frac{16a^4}{625}-a^2+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2=25 \\ a^2=\frac{225}{16} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình elip :

Vậy, Phương trình $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ hoặc $\frac{x^2}{\frac{225}{16}}+\frac{y^2}{9}=1$

HT 196. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $9x^2+25y^2=225$. Tìm điểm M thuộc (E) sao cho :
a) $MF_1=MF_2$ b) $MF_1=3MF_2$

Giải

Ta có : phương trình của $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

Suy ra : $a=5, b=3, c=4$

Ta có : $MF_1=a+\frac{cx}{a}=5+\frac{4x}{5}$; $MF_2=a-\frac{cx}{a}=5-\frac{4x}{5}$

a) $MF_1=MF_2 \Leftrightarrow 5+\frac{4x}{5}=5-\frac{4x}{5} \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=\pm 3$

Vậy, 2 điểm M cần tìm : $M_1(0;3)$ và $M_2(0;-3)$

b) $MF_1 = 3MF_2 \Leftrightarrow 5 + \frac{4x}{5} = 3(5 - \frac{4x}{5}) \Leftrightarrow x = \frac{25}{8}$ Thay vào phương trình (E) ta được :

$$\frac{\frac{625}{64}}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{351}{64} \Leftrightarrow y = \pm\frac{3\sqrt{39}}{8}$$

Vậy, 2 điểm M cần tìm : $M_1\left(\frac{25}{8};\frac{3\sqrt{39}}{8}\right)$ hoặc $M_2\left(\frac{25}{8};-\frac{3\sqrt{39}}{8}\right)$

HT 197. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $9x^2 + 25y^2 = 225$. Tìm điểm M thuộc (E) sao cho M nhìn 2 tiêu điểm dưới 1 góc vuông.

Giải

Ta có: $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Suy ra: $a = 5, b = 3, c = 4$

$MF_1 = a + \frac{cx}{a} = 5 + \frac{4x}{5}; MF_2 = a - \frac{cx}{a} = 5 - \frac{4x}{5}$

M nhìn hai tiêu điểm dưới 1 góc vuông $\Leftrightarrow MF_1 \perp MF_2 \Leftrightarrow MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2$

$$\Leftrightarrow \left(5 + \frac{4x}{5}\right)^2 + \left(5 - \frac{4x}{5}\right)^2 = 64 \Leftrightarrow 50 + \frac{32x^2}{25} = 64 \Leftrightarrow x^2 = \frac{175}{16} \Leftrightarrow x = \pm\frac{5\sqrt{7}}{4}$$

Với, $x^2 = \frac{175}{16} \Rightarrow y^2 = \frac{81}{16} \Leftrightarrow y = \pm\frac{9}{4}$

Vậy, có 4 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán: $M_1\left(\frac{5\sqrt{7}}{4};\frac{9}{4}\right); M_2\left(\frac{5\sqrt{7}}{4};-\frac{9}{4}\right); M_3\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4};\frac{9}{4}\right); M_4\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4};-\frac{9}{4}\right)$

HT 198. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $9x^2 + 25y^2 = 225$. Tìm điểm M thuộc (E) sao cho M nhìn 2 tiêu điểm dưới 1 góc 60^0.

Giải

Ta có: $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Suy ra: $a = 5, b = 3, c = 4$

$MF_1 = a + \frac{cx}{a} = 5 + \frac{4x}{5}; MF_2 = a - \frac{cx}{a} = 5 - \frac{4x}{5}$

M nhìn 2 tiêu điểm dưới 1 góc $60^0 \Leftrightarrow \widehat{F_1MF_2} = 60^0$

$$\Leftrightarrow \cos 60^0 = \frac{MF_1^2 + MF_2^2 - F_1F_2^2}{2MF_1.MF_2} = \frac{\left(5+\frac{4x}{5}\right)^2 + \left(5-\frac{4x}{5}\right)^2 - 64}{2.\left(5+\frac{4x}{5}\right).\left(5-\frac{4x}{5}\right)} = \frac{50+\frac{32x^2}{25}-64}{50-\frac{32x^2}{25}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -28 + \frac{64x^2}{25} = 50 - \frac{32x^2}{25} \Leftrightarrow x^2 = \frac{325}{16} \Leftrightarrow x = \pm\frac{5\sqrt{13}}{4}$$

Với, $x^2 = \frac{325}{16} \Rightarrow y^2 = \frac{27}{16} \Leftrightarrow y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Vậy, có 4 điểm M thỏa mãn: $M_1\left(\frac{5\sqrt{13}}{4};\frac{3\sqrt{3}}{4}\right), M_2\left(\frac{5\sqrt{13}}{4};-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right), M_3\left(-\frac{5\sqrt{13}}{4};\frac{3\sqrt{3}}{4}\right), M_4\left(-\frac{5\sqrt{13}}{4};-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

HT 199. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. A, B là các điểm trên (E) sao cho: $AF_1+BF_2=8$, với F_1, F_2 là các tiêu điểm. Tính AF_2+BF_1.

Giải

$AF_1+AF_2=2a$ và $BF_1+BF_2=2a \Rightarrow AF_1+AF_2+BF_1+BF_2=4a=20$

Mà $AF_1+BF_2=8 \Rightarrow AF_2+BF_1=12$

HT 200. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, lập phương trình hypebol (H) biết:

a) Độ dài trục thực bằng 8, trục ảo bằng 6.

b) Độ dài trục thực bằng 8, tiêu cự bằng 10.

c) Tiêu cự bằng 10, một tiệm cận là $y=\frac{3}{4}x$.

d) Độ dài trục thực bằng 8, tâm sai bằng $\frac{5}{4}$

e) Độ dài trục ảo bằng 6, tâm sai bằng $\frac{5}{4}$.

Giải

Phương trình của $(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

a) Độ dài trục thực bằng $8 \Leftrightarrow 2a=8 \Leftrightarrow a=4$

Độ dài trục ảo bằng $6 \Leftrightarrow 2b=6 \Leftrightarrow b=3$

Vậy, phương trình $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

b) Độ dài trục thực bằng $8 \Leftrightarrow 2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$

Tiêu cự bằng $10 \Leftrightarrow 2c = 10 \Leftrightarrow c = 5$

Ta có: $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$

Vậy, phương trình $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

c) Tiêu cự bằng $10 \Leftrightarrow 2c = 10 \Leftrightarrow c = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25$ (1)

Một tiệm cận là $y = \frac{3}{4}x . \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow b = \frac{3a}{4}$ Thay vào (1) ta được:

$a^2 + \frac{9a^2}{16} = 25 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 9$

Vậy, phương trình $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

d) Độ dài trục thực bằng $8 \Leftrightarrow 2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$

Tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} \Rightarrow c = 5 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 9$

Vậy, phương trình $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

e) Độ dài trục ảo bằng $6 \Leftrightarrow 2b = 6 \Leftrightarrow b = 3 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + 9 \quad (1)$

Tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} \Rightarrow c = \frac{5}{4}a$ thay vào (1) ta được:

$\frac{25}{16}a^2 = a^2 + 9 \Leftrightarrow a^2 = 16$

Vậy, phương trình $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

HT 201. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, Lập phương trình của hypebol biết:

a) Một đỉnh là A(12; 0), một tiêu điểm là F(13; 0).

b) Một tiêu điểm là F(–13; 0), tâm sai $e = \frac{13}{12}$.

c) (H) đi qua hai điểm $M\left(\frac{12\sqrt{29}}{5};2\right)$, $N\left(-\frac{12\sqrt{26}}{5};-1\right)$.

d) Độ dài trục thực bằng 24 và đi qua điểm $A\left(13;\dfrac{25}{12}\right)$

e) Tiêu cự bằng 26 và đi qua điểm $A\left(15;\dfrac{15}{4}\right)$

f) Có cùng tiêu điểm với elip (E): $31x^2 + 200y^2 = 6200$, tâm sai bằng $\dfrac{13}{12}$.

Giải

Phương trình của hypebol có dạng : $(H): \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

a) Một đỉnh là A(12; 0) $\Rightarrow a = 12$

Một tiêu điểm là F(13; 0)$\Rightarrow c = 13 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 169 - 144 = 25$

Vậy, phương trình của $(H): \dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

b) Một tiêu điểm là F(–13; 0) $\Rightarrow c = 13$

Tâm sai $e = \dfrac{13}{12} \Rightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{13}{12} \Rightarrow a = \dfrac{12c}{13} = 12$

Ta có : $b^2 = c^2 - a^2 = 169 - 144 = 25$

Vậy, phương trình của $(H): \dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

c) (H) đi qua hai điểm $M\left(\dfrac{12\sqrt{29}}{5};2\right)$, $N\left(-\dfrac{12\sqrt{26}}{5};-1\right)$

$$\begin{cases}\dfrac{\frac{4176}{25}}{a^2} - \dfrac{4}{b^2} = 1\\ \dfrac{\frac{3744}{25}}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4176b^2 - 100a^2 = 25a^2b^2 \quad (1)\\ 3744b^2 - 25a^2 = 25a^2b^2 \quad (2)\end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) vế với vế ta được : $432b^2 - 75a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{144}{25}b^2$ Thay vào (1) ta được :

$$4176b^2 - 100.\dfrac{144}{25}b^2 = 25.\dfrac{144}{25}b^4 \Leftrightarrow b^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 144$$

Vậy, phương trình của $(H): \dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

d) Độ dài trục thực bằng 24 $\Rightarrow 2a = 24 \Leftrightarrow a = 12$

(H) đi qua điểm $A\left(13;\dfrac{25}{12}\right) \Rightarrow \dfrac{169}{a^2} - \dfrac{\frac{625}{144}}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{169}{144} - \dfrac{625}{144b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 25$

Vậy, phương trình của $(H): \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

e) Tiêu cự bằng 26 $\Rightarrow 2c = 26 \Leftrightarrow c = 13 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 = 169$ (1) $\Leftrightarrow a^2 = 169 - b^2$

(H) đi qua điểm $A\left(15; \frac{15}{4}\right) \Rightarrow \frac{225}{a^2} - \frac{\frac{225}{16}}{b^2} = 1 \Leftrightarrow 3600b^2 - 225a^2 = 16a^2b^2$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được: $3600b^2 - 225(169 - b^2) = 16(169 - b^2)b^2$

$\Leftrightarrow 16b^4 + 1121b^2 - 38025 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 25 \\ b^2 = \frac{-1521}{16} \end{array}\right. \Rightarrow b^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 144$

Vậy, phương trình của $(H): \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

f) Có cùng tiêu điểm với elip (E): $31x^2 + 200y^2 = 6200$,

Ta có: $(E): \frac{x^2}{200} + \frac{y^2}{31} = 1 \Rightarrow c_E = a_E^2 - b_E^2 = 200 - 31 = 169$

Vậy, elip (E) có tiêu điểm: $F_1(-13;0), F_2(13;0)$

(H) có cùng tiêu điểm với (E) suy ra $c_H = 13 \Leftrightarrow a_H^2 + b_H^2 = 169$

Tâm sai của (H): $e = \frac{c_H}{a_H} = \frac{13}{12} \Rightarrow a_H = 12 \Rightarrow b^2 = 25$

Vậy, phương trình của $(H): \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 202. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, lập phương trình của hypebol trong các trường hợp sau:

a) Một đỉnh là $A(-5;0)$ và một tiệm cận là d: $3x - 5y = 0$.

b) Một đường tiệm cận là d: $3x + 5y = 0$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng $\frac{50}{\sqrt{34}}$.

c) Tiêu cự bằng 8 và hai tiệm cận vuông góc với nhau.

d) Hai tiệm cận là d: $3x \pm 4y = 0$ và hai đường chuẩn là Δ: $5x \pm 16 = 0$.

e) Đi qua điểm E(4; 6) và hai tiệm cận là d: $\sqrt{3}x \pm y = 0$.

Giải

a) Một đỉnh là $A(-5;0) \Rightarrow a = 5$

Một tiệm cận là d: $3x - 5y = 0$. $\Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{5} \Rightarrow b = 3$

Vậy, phương trình của $(H): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

b) Một đường tiệm cận là *d*: $3x+5y=0 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{5}x \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{3}{5} \Leftrightarrow b=\frac{3a}{5}$ (1)

(H) có 2 đường chuẩn: $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$ ⇒ khoảng cách giữa hai đường chuẩn: $\frac{2a^2}{c}$

Theo đề bài, khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng $\frac{50}{\sqrt{34}} \Rightarrow \frac{2a^2}{c}=\frac{50}{\sqrt{34}} \Leftrightarrow c=\frac{\sqrt{34}a^2}{25}$ (2)

Ta có: $c^2=a^2+b^2$ (3)

Thay (1), (2) vào (3) ta được: $\frac{34a^2}{625}=a^2+\frac{9a^2}{25} \Leftrightarrow a^2=25 \Rightarrow b^2=9$

Vậy, phương trình của $(H): \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$

c) Tiêu cự bằng 8 $\Rightarrow 2c=8 \Leftrightarrow c=4 \Rightarrow a^2+b^2=16$ (1)

Hai tiệm cận của (H): $y=\pm\frac{b}{a}x$

Hai đường tiệm cận vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \frac{b}{a}.\frac{-b}{a}=-1 \Leftrightarrow a^2=b^2$ (2) Thay vào (1) ta được:

$2a^2=16 \Leftrightarrow a^2=8 \Rightarrow b^2=8$

Vậy, phương trình của $(H): \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$

d) Hai tiệm cận là *d*: $3x\pm 4y=0 \Leftrightarrow y=\pm\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow b=\frac{3a}{4}$ (1)

Hai đường chuẩn là Δ: $5x\pm 16=0$. $\Leftrightarrow x=\pm\frac{16}{5} \Rightarrow \frac{a^2}{c}=\frac{16}{5} \Leftrightarrow c=\frac{5a^2}{16}$ (2)

Ta có : $c^2=a^2+b^2$ (3)

Thay (1), (2) vào (3) ta được:

$\frac{25a^4}{256}=a^2+\frac{9a^2}{16} \Leftrightarrow a^2=16 \Rightarrow b^2=9$

Vậy, phương trình của $(H): \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$

e) Đi qua điểm E(4; 6) $\Rightarrow \frac{16}{a^2}-\frac{36}{b^2}=1 \Leftrightarrow 16b^2-36a^2=a^2b^2$ (1)

Và hai tiệm cận là *d*: $\sqrt{3}x\pm y=0 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{3}x \Rightarrow \frac{b}{a}=\sqrt{3} \Leftrightarrow b=\sqrt{3}a$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được :

$16.3a^2-36a^2=a^2.3a^2 \Leftrightarrow a^2=4 \Rightarrow b^2=12$

Vậy, phương trình của $(H): \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

HT 203. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm C(2; 0) và elip (H): $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Tìm điểm M thuộc (H) sao cho:

a) $MF_1 = MF_2$ b) $MF_1 = 2MF_2$

Giải

Ta có: $a = 3, b = 4 \Rightarrow c = 5$

$$MF_1 = \left|a+\frac{cx}{a}\right| = \left|3+\frac{5x}{3}\right|; MF_2 = \left|a-\frac{cx}{a}\right| = \left|3-\frac{5x}{3}\right|$$

a) $MF_1 = MF_2 \Leftrightarrow \left|3+\frac{5x}{3}\right| = \left|3-\frac{5x}{3}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3+\frac{5x}{3} = 3-\frac{5x}{3} \\ 3+\frac{5x}{3} = -3+\frac{5x}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0$

Thay vào phương trình của (H) ta được: $y^2 = -16$ vô nghiệm.

Vậy, không có điểm M thỏa mãn.

b) $MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow \left|3+\frac{5x}{3}\right| = 2\left|3-\frac{5x}{3}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3+\frac{5x}{3} = 6-\frac{10x}{3} \\ 3+\frac{5x}{3} = -6+\frac{10x}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{5} \\ x = \frac{27}{5}\end{array}\right.$

Với $x = \frac{3}{5}$ thay vào phương trình của (H) ta được: $y^2 = -\frac{384}{25}$ vô nghiệm

Với $x = \frac{27}{5}$ thay vào phương trình của (H) ta được: $y^2 = \frac{896}{25} \Leftrightarrow y = \pm\frac{8\sqrt{14}}{5}$

Vậy, có 2 điểm M thỏa mãn: $M_1\left(\frac{27}{5};\frac{8\sqrt{14}}{5}\right); M_2\left(\frac{27}{5};-\frac{8\sqrt{14}}{5}\right)$

HT 204. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm C(2; 0) và elip (E): $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Tìm điểm M thuộc (H) sao cho M nhìn hai tiêu điểm dưới 1 góc vuông.

Giải

Ta có: $a = 3, b = 4 \Rightarrow c = 5$

$$MF_1 = \left|a+\frac{cx}{a}\right| = \left|3+\frac{5x}{3}\right|; MF_2 = \left|a-\frac{cx}{a}\right| = \left|3-\frac{5x}{3}\right|$$

M nhìn hai tiêu điểm dưới 1 góc vuông $\Leftrightarrow \widehat{F_1MF_2} = 90^0 \Leftrightarrow MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2$

$$\Leftrightarrow \left(3+\frac{5x}{3}\right)^2 + \left(3-\frac{5x}{3}\right)^2 = 100 \Leftrightarrow 18 + \frac{50x^2}{9} = 100 \Leftrightarrow x^2 = \frac{369}{25} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\sqrt{41}}{5}$$

Với $x^2 = \frac{369}{25} \Rightarrow y^2 = \frac{256}{25} \Leftrightarrow y = \pm\frac{16}{5}$

Vậy, có 4 điểm M thỏa mãn:

$$M_1\left(\frac{3\sqrt{41}}{5};\frac{16}{5}\right),M_2\left(-\frac{3\sqrt{41}}{5};\frac{16}{5}\right),M_3\left(\frac{3\sqrt{41}}{5};-\frac{16}{5}\right),M_4\left(-\frac{3\sqrt{41}}{5};-\frac{16}{5}\right)$$

HT 205. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm C(2; 0) và elip (H): $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Tìm điểm M thuộc (H) sao cho M nhìn hai tiêu điểm dưới 1 góc 60^0

Giải

Ta có: $a=4,b=3,c=5$

$$MF_1=\left|a+\frac{cx}{a}\right|=\left|4+\frac{5x}{4}\right|;MF_2=\left|a-\frac{cx}{a}\right|=\left|4-\frac{5x}{4}\right|$$

M nhìn hai tiêu điểm dưới góc $60^0 \Rightarrow \widehat{F_1MF_2}=60^0$

$$\Leftrightarrow \cos 60^0=\frac{MF_1^2+MF_2^2-F_1F_2^2}{2MF_1.MF_2}=\frac{\left(4+\frac{5x}{4}\right)^2+\left(4-\frac{5x}{4}\right)^2-100}{2\left|4+\frac{5x}{4}\right|\left|4-\frac{5x}{4}\right|}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-68+\frac{50x^2}{16}}{\left|32-\frac{50x^2}{16}\right|}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-136+\frac{100x^2}{16}=32-\frac{50x^2}{16}\\ -136+\frac{100x^2}{16}=-32+\frac{50x^2}{16}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=\frac{448}{25}\\ x^2=\frac{832}{25}\end{array}\right.$$

Với $x^2=\frac{448}{25}\Rightarrow y^2=\frac{27}{25}$

$$\Rightarrow M_1\left(\frac{8\sqrt{7}}{5};\frac{3\sqrt{3}}{5}\right),M_2\left(\frac{8\sqrt{7}}{5};-\frac{3\sqrt{3}}{5}\right),M_3\left(-\frac{8\sqrt{7}}{5};\frac{3\sqrt{3}}{5}\right),M_4\left(-\frac{8\sqrt{7}}{5};-\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$$

Với $x^2=\frac{832}{25}\Rightarrow y^2=\frac{243}{25}$

$$\Rightarrow M_5\left(\frac{8\sqrt{13}}{5};\frac{9\sqrt{3}}{5}\right),M_6\left(-\frac{8\sqrt{13}}{5};\frac{9\sqrt{3}}{5}\right),M_7\left(\frac{8\sqrt{13}}{5};-\frac{9\sqrt{3}}{5}\right),M_8\left(-\frac{8\sqrt{13}}{5};-\frac{9\sqrt{3}}{5}\right)$$

HT 206. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm C(2; 0) và elip (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm toạ độ các điểm A, B thuộc (E), biết rằng hai điểm A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

Giải

Ta có, elip nhận trục hoành làm trục đối xứng mà A, B thuộc elip, A, B đối xứng nhau qua trục hoành nên:

Nếu $A(a;b)$ thì $B(a;-b)$

A thuộc elip $\Rightarrow \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{1}=1 \Leftrightarrow a^2+4b^2=4 \Leftrightarrow b^2=\frac{4-a^2}{4}$ (1)

Tam giác ABC là tam giác đều $\Rightarrow AB^2=AC^2 \Leftrightarrow 4b^2=(a-2)^2+b^2 \Leftrightarrow a^2-4a+4-3b^2=0$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được: $a^2-4a+4-3.\frac{4-a^2}{4}=0 \Leftrightarrow 7a^2-16a+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=\frac{2}{7} \end{array}\right.$

Với $a=2 \Rightarrow b^2=0(loai)$

Với $a=\frac{2}{7} \Rightarrow b^2=\frac{48}{49} \Leftrightarrow b=\pm\frac{4\sqrt{3}}{7}$

Vậy, $A\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$, $B\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right);B\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

HT 207. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$ và điểm $A(3;0)$. Tìm trên (E) các điểm B, C sao cho B, C đối xứng qua trục Ox và ΔABC là tam giác đều.

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $B(x_0;y_0), C(x_0;-y_0)$ với $y_0>0$.

Ta có: $\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{3}=1 \Leftrightarrow x_0^2+3y_0^2=9$. $BC=2y_0$ và $(BC): x=x_0 \Rightarrow d(A,(BC))=|3-x_0|$

Do $A\in$ Ox , B và C đối xứng qua Ox nên ΔABC cân tại A

Suy ra: ΔABC đều $\Leftrightarrow d(A,(BC))=\frac{\sqrt{3}}{2}BC \Leftrightarrow |3-x_0|=\sqrt{3}y_0 \Leftrightarrow 3y_0^2=(x_0-3)^2$

$\Rightarrow x_0^2+(x_0-3)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=3 \end{array}\right.$.

+ Với $x_0=0 \Rightarrow y_0=\sqrt{3} \Rightarrow B(0;\sqrt{3}), C(0;-\sqrt{3})$. + Với $x_0=3 \Rightarrow y_0=0$ (loại).

Vậy: $B(0;\sqrt{3}), C(0;-\sqrt{3})$.

HT 208. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$. Tìm các điểm M ∈ (E) sao cho

$\widehat{F_1MF_2} = 120^0$ (F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E)).

Giải

Ta có: $a = 10,\ b = 5 \Rightarrow c = 5\sqrt{3}$. Gọi M(x; y) ∈ (E) ⇒ $MF_1 = 10 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x,\ MF_2 = 10 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1.MF_2.\cos\widehat{F_1MF_2}$$

$$\Leftrightarrow \left(10\sqrt{3}\right)^2 = \left(10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(10 + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 - 2\left(10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\left(10 + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

⇔ x = 0 (y= ± 5). Vậy có 2 điểm thoả YCBT: $M_1(0; 5)$, $M_2(0; -5)$.

HT 209. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3};0); F_2(\sqrt{3};0)$ và đi qua điểm $A\left(\sqrt{3};\dfrac{1}{2}\right)$. Lập phương trình chính tắc của (E) và với mọi điểm M trên elip, hãy tính biểu thức: $P = F_1M^2 + F_2M^2 - 3OM^2 - F_1M.F_2M$.

Giải

(E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{3}{a^2} + \dfrac{1}{4b^2} = 1$, $a^2 = b^2 + 3 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

$\Rightarrow\ P = (a + ex_M)^2 + (a - ex_M)^2 - 2(x_M^2 + y_M^2) - (a^2 - e^2x_M^2) = 1$

HT 210. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho elip (E): $4x^2 + 16y^2 = 64$. Gọi F_2 là tiêu điểm bên phải của (E). M là điểm bất kì trên (E). Chứng tỏ rằng tỉ số khoảng cách từ M tới tiêu điểm F_2 và tới đường thẳng $\Delta : x = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$ có giá trị không đổi.

Giải

Ta có: $F_2(\sqrt{12};0)$. Gọi $M(x_0;y_0) \in (E) \Rightarrow MF_2 = a - ex_0 = \dfrac{8 - \sqrt{3}x_0}{2}$,

$d(M,\Delta) = \left|x_0 - \dfrac{8}{\sqrt{3}}\right| = \dfrac{8 - \sqrt{3}x_0}{\sqrt{3}}$ (vì $-4 \le x_0 \le 4$) $\Rightarrow \dfrac{MF_2}{d(M,\Delta)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (không đổi).

HT 211. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $5x^2 + 16y^2 = 80$ và hai điểm A(–5; –1), B(–1; 1). Một điểm M di động trên (E). Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔMAB.

Giải

Phương trình đường thẳng (AB): $x - 2y + 3 = 0$ và $AB = 2\sqrt{5}$

Gọi $M(x_0;\, y_0) \in (E) \Rightarrow 5x_0^2 + 16y_0^2 = 80$. Ta có: $d(M;\, AB) = \dfrac{\left|x_0 - 2y_0 + 3\right|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{\left|x_0 - 2y_0 + 3\right|}{\sqrt{5}}$

Diện tích ΔMAB: $S = \dfrac{1}{2}.AB.d(M;\, AB) = \left|x_0 - 2y_0 - 3\right|$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki cho 2 cặp số $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}};\, -\dfrac{1}{2}\right)$, $(\sqrt{5}x_0;\, 4y_0)$ có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}.\sqrt{5}x_0 - \frac{1}{2}.4y_0\right)^2 \le \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)\left(5x_0^2 + 16y_0^2\right) = \frac{9}{20}.80 = 36$$

$$\Leftrightarrow \left|x_0 - 2y_0\right| \le 6 \Leftrightarrow -6 \le x_0 - 2y_0 \le 6 \Leftrightarrow -3 \le x_0 - 2y_0 + 3 \le 9 \Rightarrow \left|x_0 - 2y_0 + 3\right| \le 9$$

$$\Rightarrow \max\left|x_0 - 2y_0 + 3\right| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5}x}{\dfrac{1}{\sqrt{5}}} = \dfrac{4y}{-\dfrac{1}{2}} \\ x_0 - 2y_0 + 3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_0 = -8y_0 \\ x_0 - 2y_0 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{8}{3} \\ y_0 = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy, $\max S_{MAB} = 9 \;\; khi \;\; M\left(\dfrac{8}{3};\, -\dfrac{5}{3}\right)$.

HT 212. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elíp $(E): \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ và hai điểm A(3;–2), B(–3; 2) . Tìm trên (E) điểm C có hoành độ và tung độ dương sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Giải

PT đường thẳng AB: $2x + 3y = 0$. Gọi C(x; y) ∈ (E), với $x > 0, y > 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.d(C, AB) = \frac{\sqrt{85}}{2\sqrt{13}}\left|2x + 3y\right| = 3.\sqrt{\frac{85}{13}}\left|\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right| \le 3\sqrt{\frac{85}{13}}\sqrt{2\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)} = 3\sqrt{\frac{170}{13}}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$. Vậy $C\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$.

HT 213. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt elip tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB.

Giải

Nhận xét rằng $M \notin Ox$ nên đường thẳng $x = 1$ không cắt elip tại hai điểm thỏa YCBT.

Xét đường thẳng Δ qua M(1; 1) có PT: $y = k(x-1)+1$. Toạ độ các giao điểm A, B của Δ và (E) là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1 & (1) \\ y = k(x-1)+1 & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow (25k^2+9)x^2 - 50k(k-1)x + 25(k^2-2k-9) = 0$ (3)

PT (3) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi k. Theo Viet: $x_1 + x_2 = \dfrac{50k(k-1)}{25k^2+9}$.

Do đó M là trung điểm của AB $\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2x_M \Leftrightarrow \dfrac{50k(k-1)}{25k^2+9} = 2 \Leftrightarrow k = -\dfrac{9}{25}$.

Vậy PT đường thẳng Δ: $9x + 25y - 34 = 0$.

Câu hỏi tương tự:

a) Với $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, $M(1;1)$ ĐS: $\Delta: 4x + 9y - 13 = 0$

HT 214. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. Tìm điểm M ∈ (E) sao cho M có toạ độ nguyên.

Giải

Trước hết ta có nhận xét: Nếu điểm $(x;y) \in (E)$ thì các điểm $(-x;y), (x;-y), (-x;-y)$ cũng thuộc (E). Do đó ta chỉ cần xét điểm $M(x_0;y_0) \in (E)$ với $x_0, y_0 \ge 0; x_0, y_0 \in Z$.

Ta có: $\dfrac{x_0^2}{8}+\dfrac{y_0^2}{2}=1 \Rightarrow y_0^2 \le 2 \Rightarrow 0 \le y_0 \le \sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 2\sqrt{2}\ (loaïi) \\ y_0 = 1 \Rightarrow x_0 = 2 \end{array}\right. \Rightarrow M(2;1)$.

Vậy các điểm thoả YCBT là: $(2;1), (-2;1), (2;-1), (-2;-1)$.

HT 215. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. Tìm điểm M ∈ (E) sao cho tổng hai toạ độ của M có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Giải

Giả sử $M(x;y) \in (E) \Rightarrow \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. Áp dụng BĐT Bunhiacốpxki, ta có:

$(x+y)^2 \le (8+2)\left(\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}\right) = 10 \Rightarrow -\sqrt{10} \le x + y \le \sqrt{10}$.

+ $x+y\le\sqrt{10}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{8}=\dfrac{y}{2}\\ x+y=\sqrt{10}\end{cases} \Leftrightarrow M\left(\dfrac{4\sqrt{10}}{5};\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$.

+ $x+y\ge-\sqrt{10}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{8}=\dfrac{y}{2}\\ x+y=-\sqrt{10}\end{cases} \Leftrightarrow M\left(-\dfrac{4\sqrt{10}}{5};-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$

HT 216. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và các đường thẳng $d_1: mx-ny=0$, $d_2: nx+my=0$, với $m^2+n^2\neq 0$. Gọi M, N là các giao điểm của d_1 với (E), P, Q là các giao điểm của d_2 với (E). Tìm điều kiện đối với m,n để diện tích tứ giác MPNQ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

PTTS của d_1,d_2 là: $d_1:\begin{cases}x=nt_1\\ y=mt_1\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=-mt_2\\ y=nt_2\end{cases}$.

+ M, N là các giao điểm của d_1 và (E)

$$\Rightarrow M\left(\frac{6n}{\sqrt{9m^2+4n^2}};\frac{6m}{\sqrt{9m^2+4n^2}}\right), N\left(\frac{-6n}{\sqrt{9m^2+4n^2}};\frac{-6m}{\sqrt{9m^2+4n^2}}\right)$$

+ P, Q là các giao điểm của d_2 và (E)

$$\Rightarrow P\left(\frac{-6m}{\sqrt{4m^2+9n^2}};\frac{6n}{\sqrt{4m^2+9n^2}}\right), Q\left(\frac{6m}{\sqrt{4m^2+9n^2}};\frac{-6n}{\sqrt{4m^2+9n^2}}\right)$$

+ Ta có: MN ⊥ PQ tại trung điểm O của mỗi đường nên MPNQ là hình thoi.

$$S=S_{MPNQ}=\frac{1}{2}MN.PQ=2OM.OP=2\sqrt{x_M^2+y_M^2}.\sqrt{x_P^2+y_P^2}=\frac{72(m^2+n^2)}{\sqrt{(9m^2+4n^2)(4m^2+9n^2)}}$$

Áp dụng BĐT Cô-si: $\sqrt{(9m^2+4n^2)(4m^2+9n^2)}\le\dfrac{(9m^2+4n^2)+(4m^2+9n^2)}{2}=\dfrac{13}{2}(m^2+n^2)$

$\Rightarrow S\ge\dfrac{72(m^2+n^2)}{\dfrac{13}{2}(m^2+n^2)}=\dfrac{144}{13}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 9m^2+4n^2=4m^2+9n^2\Leftrightarrow m=\pm n$

Vậy: $\min S=\dfrac{144}{13}$ khi $m=\pm n$.

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com

HT 217. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho Hypebol (H) có phương trình: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của (H) và ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (H).

Giải

(H) có các tiêu điểm $F_1(-5;0);F_2(5;0)$. HCN cơ sở của (H) có một đỉnh là M(4; 3),

Giả sử phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (với a > b)

(E) cũng có hai tiêu điểm $F_1(-5;0);F_2(5;0)\Rightarrow a^2-b^2=5^2$ (1)

$$M(4;3)\in(E)\Leftrightarrow 9a^2+16b^2=a^2b^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases}a^2=5^2+b^2\\9a^2+16b^2=a^2b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=40\\b^2=15\end{cases}$. Vậy (E): $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$

HT 218. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy , cho hypebol (H) có phương trình $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. Giả sử (d) là một tiếp tuyến thay đổi và F là một trong hai tiêu điểm của (H), kẻ FM ⊥(d). Chứng minh rằng M luôn nằm trên một đường tròn cố định, viết phương trình đường tròn đó

Giải

(H) có một tiêu điểm F $(\sqrt{13};0)$. Giả sử pttt (d): ax + by + c = 0 . Khi đó: $9a^2 - 4b^2 = c^2$ (*)

Phương trình đường thẳng qua F vuông góc với (d) là (D): b($x-\sqrt{13}$) – a y = 0

Toạ độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases}ax+by=-c\\bx-ay=\sqrt{13}b\end{cases}$

Bình phương hai vế của từng phương trình rồi cộng lại và kết hợp với (*), ta được $x^2 + y^2 = 9$

HT 219. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho parabol (P): $y^2=x$ và điểm I(0; 2). Tìm toạ độ hai điểm M, N ∈ (P) sao cho $\overrightarrow{IM}=4\overrightarrow{IN}$.

Giải

Gọi $M(x_0;y_0)$, $N(x_1;y_1)$ là hai điểm thuộc (P), khi đó ta có: $x_0=y_0^2;x_1=y_1^2$

$\overrightarrow{IM}=(x_0;y_0-2)=(y_0^2;y_0-2)$; $\overrightarrow{IN}=(y_1;y_1-2)=(y_1^2;y_1-2)$; $4\overrightarrow{IN}=(4y_1^2;4y_1-8)$

Theo giả thiết: $\overrightarrow{IM}=4\overrightarrow{IN}$, suy ra: $\begin{cases}y_0^2=4y_1^2\\y_0-2=4y_1-8\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y_1=1\Rightarrow x_1=1;\ y_0=-2;\ x_0=4\\y_1=3\Rightarrow x_1=9;\ y_0=6;\ x_0=36\end{array}\right.$

Vậy, có 2 cặp điểm cần tìm: $M(4;-2)$, $N(1;1)$ hay $M(36;6)$, $N(9;3)$.

HT 220. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho parabol (P): $y^2 = 8x$. Giả sử đường thẳng d đi qua tiêu điểm của (P) và cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ tương ứng là $x_1,\ x_2$. Chứng minh: AB = $x_1 + x_2 + 4$.

Giải

Theo công thức tính bk qua tiêu: $FA = x_1 + 2$, $FB = x_2 + 2 \Rightarrow AB = FA + FB = x_1 + x_2 + 4$.

HT 221. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho Elip (E): $x^2 + 5y^2 = 5$, Parabol $(P): x = 10y^2$. Hãy viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $(\Delta): x + 3y - 6 = 0$, đồng thời tiếp xúc với trục hoành Ox và cát tuyến chung của Elip (E) với Parabol (P).

Giải

Đường thẳng đi qua các giao điểm của (E) và (P): x = 2

Tâm I ∈ Δ nên: $I(6-3b;b)$. Ta có: $|6 - 3b - 2| = |b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 - 3b = b \\ 4 - 3b = -b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = 2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ (C): $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ hoặc (C): $x^2 + (y-2)^2 = 4$

Xin chân thành cảm ơn quý thầy cô và các bạn học sinh đã đọc tài liệu này!

Mọi sự góp ý xin gửi về: huythuong2801@gmail.com

Toàn bộ tài liệu ôn thi môn toán của Lưu Huy Thưởng ở địa chỉ sau:

http://www.Luuhuythuong.blogspot.com